

ANNALES DE SUJET D'EXAMEN

LICENCE

II
SEMESTRE 3

Liste de conseils pour tout savoir sur vos partiels

Nous vous avons concocté une liste de conseils pour tout savoir sur vos partiels:

- Vérifier la salle d'examen sur la convocation.
- Regarder si vous avez un placement attribué.
- Vérifier que vous avez bien votre carte d'étudiant ou une pièce d'identité.
- Vous renseigner sur les documents/ appareils autorisés lors de l'épreuve (calculatrice, dictionnaire pour les étudiants étrangers, ect).

L'anonymat des copies vous est garanti pour chaque épreuve écrite. Les copies doivent être anonymes : soit via un coin à rabattre, soit via un code barre.

Tiers-temps : ceux d'entre vous en ayant fait la demande au préalable doivent se rendre dans la salle indiquée sur leur convocation, salle qui réunit toutes les personnes bénéficiant de temps supplémentaire.

Si vous êtes en retard à une épreuve, vous ne pouvez pas vous voir refuser l'accès à la salle d'examen avant que *le premier tiers du temps de l'épreuve ne soit écoulé.* Mieux vaut partir en avance, surtout si votre centre d'examen est hors de Paris.

La sortie est autorisée au bout d'une heure.

L'usage du téléphone portable est interdit, celui-ci doit être rangé et éteint. La possession d'un appareil électronique (smartphone, MP3, autre), constitue un soupçon de fraude, même si vous ne l'utilisez pas.

© En cas de suspicion de fraude :

Le droit de finir votre épreuve ne peut pas vous êtes retiré. C'est essentiel, si vous n'êtes pas reconnu coupable de fraude, votre épreuve sera notée comme tout le monde et cette note figurera à votre dossier universitaire.

Bien entendu, mieux vaut ne pas tricher. Cependant, si vous vous trouvez suspecté e fraude (chose qui peut arriver), n'hésitez pas à nous joindre au plus vite à l'adresse <u>representation.fedeparis1@gmail.com</u> afin que nous vous assistons pendant ka procédure disciplinaire qui s'ensuivra.

En cas de question, d'incident ou d'irrégularité dans le déroulement de vos examens, n'hésitez pas à contacter vous élus UFR ADES Sorbonne ou Fédé Paris 1 – Panthéon Sorbonne.

Bon courage et à très vite!

L'ADES

SOMMAIRE:

I.	Institution : Economie du budget et de la fiscalité	P.4
II.	Mathématiques	
	Economie monétaire et financière.	
IV.	Macroéconomie : économie fermée	P.99

UNIVERSITE PARIS 1 – UFR D'ECONOMIE - ANNEE UNIVERSITAIRE 2017-2018

L2 – 1ère session - Économie du budget, de la fiscalité et de la protection sociale – Mercredi 10 janvier 2018 - 18h-20h

Aucun document n'est autorisé - Calculatrice non autorisée - Barème indicatif

1/ L'analyse néoclassique des biens publics (5 points)

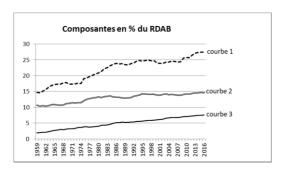
- a. Quelles sont les caractéristiques des biens publics purs et impurs ? Donnez des exemples pour chaque situation. (2 points)
- b. Que retenir de la théorie néoclassique à propos des fondements de l'action publique, dans son analyse des biens publics ? (3 points)

2/ Impôt et redistribution (5 points)

- a. Quelles sont les caractéristiques d'un impôt redistributif ? Vous distinguerez ce qui relève de la redistribution verticale et de la redistribution horizontale en prenant l'exemple de l'impôt sur le revenu en France. (2 points)
- b. Pour quelles raisons Keynes se déclare-t-il favorable à la redistribution ? Quelle politique fiscale préconise-t-il ? (3 points)

3/ La socialisation du revenu des ménages (5 points)

Soit l'évolution des différentes composantes de la socialisation du revenu disponible ajusté des ménages en France sur la période 1959-2016.



- a. Comment le revenu disponible ajusté brut des ménages est-il calculé ? Donnez la définition du taux de socialisation du revenu disponible ajusté brut. (1 point)
- b. Donnez les trois indicateurs associés à chacune des courbes numérotées 1, 2 et 3. Donnez un exemple pour chacun. (2 points)
- c. En vous appuyant sur le texte de R. Castel, expliquez en quoi le développement des deux pôles de la « propriété sociale » s'est inscrit dans la logique de l'intervention croissante de l'Etat social. (3 points)

4/ Les contreparties de la dette publique (5 points)

- a. Donnez les contreparties financières et réelles de la dette publique. (2 points)
- b. Décrivez l'enchaînement macroéconomique lié à une baisse de la dépense publique sur l'économie dans son ensemble et sur les comptes publics dans une économie en sous-emploi. (1 point)
- c. A partir d'une analyse des contreparties de la dette publique, comment interpréter l'augmentation des ratios de dette publique dans la plupart des pays européens ? (2 points).

UNIVERSITE PARIS 1 – UFR D'ECONOMIE - ANNEE UNIVERSITAIRE 2016-2017

L2 – 1ère session - Économie du budget, de la fiscalité et de la protection sociale – Mercredi 4 janvier 2017 - 14h-16h

Aucun document n'est autorisé - Calculatrice non autorisée - Barème indicatif

Question 1 (4 points)

En quoi la structure des prélèvements obligatoires a-t-elle un impact sur le ratio d'endettement public ? Détaillez les mécanismes.

Question 2 (5 points)

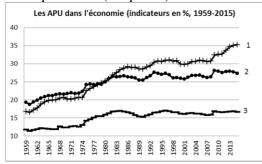
- a. Quelle est la contrepartie financière de la dette publique ? Précisez sa place dans les bilans de ceux qui la détiennent. (2 points)
- b. Quelles sont les contreparties réelles de la dette publique ? Prenez le soin de les classer et les expliquer en trois niveaux différents. (3 points)

Question 3 (8 points)

Soient les 3 indicateurs suivants calculés pour la France de 1959 à 2015 : VÆ (ÆPU), DCF (ÆPU)+FBCF (ÆPU), Taux

de socialisation du revenu des ménages

- a. Définissez le taux de socialisation du revenu des ménages. (1 point)
- b. De quelle(s) fonction(s) des APU chacun des 3 indicateurs permet-il de rendre compte ? Justifiez votre réponse (3 points)
- c. Soit l'évolution des 3 indicateurs sur le graphique ci-dessous. Associez chacun des indicateurs au n° de sa courbe correspondante. (1.5 points)



Quels sont les deux pôles de la « propriété sociale » selon R. Castel. Réfléchissez aux liens que l'on peut établir entre chacun des 3 indicateurs et ces 2 pôles. (2.5 points)

Ouestion 4 (3 points)

On se situe dans une économie en sous-emploi dans laquelle :

- le niveau de la production dépend de la demande globale dont les composantes sont la consommation, l'investissement et les dépenses publiques, notées respectivement C, I, G. On suppose que I est exogène.
- les dépenses de consommation sont une fonction du revenu disponible, c'est-à-dire du revenu après versement des impôts, nets des transferts sociaux. On note $Y_d = Y - (T - T_r)$ avec Y le revenu, T les impôts et T_r les transferts.
- La variation des recettes fiscales nettes des transferts liée à une variation du PIB, notée τ , est égale à 0,5.
- Le ratio de dette publique ^D est égal à 97%. Le déficit public initial est nul. On pose que le PIB est égal à 100.
- On suppose que le multiplicateur de dépenses publiques, noté m est égal à 2.

Le gouvernement mène une politique de réduction des dépenses publiques d'une ampleur de 1.5 ($\Delta G = -1.5$). L'objectif de l'exercice est d'évaluer l'effet de cette mesure sur l'économie dans son ensemble et sur les finances publiques.

- Répondez aux questions suivantes en expliquant votre raisonnement :
 - a. Quelle est la variation du PIB suite à la baisse des dépenses publiques ? (0.5 point)
 - b. Quelle est la variation des recettes fiscales nettes de transferts suite à la variation du PIB ? (0.5 point)
 - c. Quelle est la variation du solde budgétaire ? (0.5 point)
 - d. Comparez le ratio de dette publique après la baisse des dépenses publiques à son niveau initial ? (0.5 point)
 - e. Aux vues de vos résultats, quel objectif de politique économique faut-il poursuivre ici ? Justifiez votre réponse. (1 point)

UNIVERSITE PARIS 1 - UFR D'ECONOMIE - ANNEE UNIVERSITAIRE 2015-2016

Licence 2^{ère} année - Économie du budget, de la fiscalité et de la protection sociale Lundi 4 janvier 2016 - 18h-20h

Durée de l'épreuve : 2 heures

Aucun document n'est autorisé - Calculatrice non autorisée - Barème indicatif

- 1/ Quels sont les deux pôles principaux de la "propriété sociale" selon Robert Castel ? A quelle période de l'histoire des dépenses publiques élaborée par R. Delorme et C. André correspond leur développement ? Justifiez votre réponse. (3 points)
- 2/ Lorsque la demande qui s'adresse aux entreprises augmente, celles-ci réagissent-elles de la même manière selon que l'économie est en sous-emploi ou qu'elle est au plein emploi ? Expliquez. (1 point)
- 3/ Le multiplicateur de dépenses publiques a-t-il la même taille selon que l'économie est au plein emploi ou en sous-emploi ? Selon que les taux d'intérêts sont bas ou élevés ? Expliquez et illustrez avec le cas des pays européens pendant la crise. (4 points)

4/ Exercice (6 points)

On se situe dans un cadre keynésien dans lequel:

- le niveau de la production dépend de la demande globale dont les composantes sont la consommation, l'investissement et les dépenses publiques, notées respectivement C, I, G. On suppose que I est exogène.
- les dépenses de consommation sont une fonction du revenu disponible, c'est-à-dire du revenu après versement des impôts, nets des transferts sociaux. On note $Y_d = Y (T T_r)$ avec Y le revenu, T les impôts et T_r les transferts.
- le multiplicateur de dépenses publiques, noté m, est égal à 1,5. La variation des recettes fiscales nettes des transferts liée à une variation du PIB, notée τ , est égale à 0,4.
- le ratio de dette publique $\frac{D}{F}$ est égal à 111%.
- On pose que le PIB est égal à 100.

Répondez aux questions suivantes en expliquant votre raisonnement :

- a/ Quelle est la variation du PIB suite à une augmentation des dépenses publiques de 10 ? (1 point)
- b/ Quelle est la variation des recettes fiscales nettes de transferts suite à la variation du PIB ? (1 point)
- c/ Quelle est la variation du solde budgétaire ? (1 point)
- d/ Quel est le ratio de dette publique après l'impulsion budgétaire ? (1 point)
- e/ Aux vues de vos résultats, que préconiseriez-vous en matière d'objectifs de politique économique pour cette économie ? Justifiez votre réponse. (2 points)
- 5/ Soit une économie en sous-emploi et dont les taux d'intérêts sont très bas. On fait l'hypothèse que le ratio d'endettement public est élevé, mais que ses taux emprunteurs sont très faibles. On suppose maintenant qu'il existe deux classes sociales : l'une, comprenant les ménages aisés, épargne une partie importante de son revenu ; l'autre classe consomme la totalité de son revenu. Pour financer une augmentation des dépenses publiques, le gouvernement augmente les prélèvements du même montant. Deux options sont possibles : a/ augmenter la TVA ou b/ créer une tranche supérieure à l'impôt sur le
- a/ Comparez ces 2 options en matière de progressivité (1 point)
- b/ Chacune de ces options a-t-elle le même impact sur l'ampleur du multiplicateur de dépenses publiques ? Expliquez votre raisonnement et comparez l'effet de chacune de ces options sur la dynamique du ratio de dette publique en détaillant les mécanismes. (3 points)
- c/ Que se passerait-il sur le ratio de dette publique si la part de revenu national revenant aux ménages aisés diminuait ? Pour faciliter l'explication, prenez l'exemple d'une politique expansionniste financée par endettement. (2 points)

UNIVERSITE PARIS 1 – UFR D'ECONOMIE ANNEE UNIVERSITAIRE 2014-2015

Licence 2^{ère} année Économie du budget, de la fiscalité et de la protection sociale Jeudi 15 janvier 2015 - 14h-16h

Durée de l'épreuve : 2 heures Aucun document n'est autorisé - Calculatrice non autorisée Barème indicatif

A. La redistribution du revenu des ménages

- 1. En utilisant le texte de R. Castel, expliquez comment la fonction de redistribution s'est progressivement instaurée en France. (4 points)
- 2. Par quels procédés les APU interviennent-elles dans la formation du revenu des ménages ? Vous préciserez les indicateurs de revenu et les comptes des ménages qui sont affectés. (2 points)
- 3. Expliquez les raisons pour lesquelles Keynes se déclare en faveur de la redistribution. Que préconise-t-il en matière d'intervention publique ? (4 points)
- B. Dette publique, politique budgétaire et multiplicateur

Soit D/Y le ratio de dette publique, m le multiplicateur de dépenses publiques, τ la variation des recettes nettes de transferts suite à une variation de l'activité.

- 1. Quelle est la condition de premier ordre pour que le ratio de dette diminue ? (1 point)
- 2. Quelle est la relation exprimée par le multiplicateur de dépenses publiques ? (1 point)
- 3. Déduire des questions précédentes le seuil minimal du multiplicateur *m* qui permet de réduire le ratio D/Y. (2 points)
- 4. Pourquoi est-on autorisé à dire, en matière de dette publique, que « plus ça va mal, plus c'est facile de s'en sortir » ? (2 points)
- 5. Expliquez pourquoi il y a une incompatibilité dynamique entre le seuil des 3 % du PSC (ou des 0,5% du TSCG) et celui des 60 %? S'il fallait n'en garder qu'un, lequel et pourquoi ? (4 points)

UNIVERSITE PARIS 1 – 2014-2015 - UFR d'économie – Licence 2ème année

Economie du budget, de la fiscalité et de la protection sociale -2^{nde} session - Partiel du vendredi 19 juin 2015 - 17 h -19 h

Durée de l'épreuve : 2 heures - Aucun document n'est autorisé - Barème indicatif -

Répondez de manière précise et concise (4 ou 5 lignes maximum) à chacune des questions suivantes. Chaque réponse doit être justifiée par des mécanismes économiques, théoriques et empiriques.

- 1. Quelle fut la réponse du droit libéral face au paupérisme ? Quels en furent les effets ? (2 points)
- 2. Le développement des minima sociaux s'inscrit-il ou entre-t-il en contradiction avec la logique de la « propriété sociale » ? (2 points)
- 3. Expliquez comment l'intervention des APU est susceptible d'infléchir la répartition primaire des revenus. (1 point)
- 4. Comment passe-t-on du RDB des APU à leur RDAB ? Quelle en est la contrepartie pour les ménages ? Donnez des exemples précis (2 points)
- 5. La contrainte budgétaire de l'État : écrivez sous forme d'équation les déterminants de l'évolution du ratio D/Y et commentez. (2 points)
- 6. Présentez l'équivalence « ricardienne » et précisez quelles en sont les limites. (2 points)
- 7. Les contreparties de la dette publique : détaillez le contenu et expliquez les effets à court et à long terme. (2 points)
- 8. Expliquez en quoi il existe une absence d'indépendance entre le niveau et la répartition des prélèvements obligatoires. (2 points)
- 9. Existe-t-il un seuil minimal du multiplicateur qui permet de réduire le ratio D/Y par une hausse de la dépense publique ? (2 points)
- 10. « Plus ça va mal plus c'est facile d'en sortir! » Expliquez. (1 point)
- 11. Zone euro : expliquez l'incompatibilité dynamique entre le critère budgétaire des 3 % et le critère de dette des 60 %. (2 points)

UNIVERSITE PARIS 1 –UFR D'ECONOMIE

ANNEE UNIVERSITAIRE 2013-2014

Licence 2ère année

Economie du budget, de la fiscalité et de la protection sociale Jeudi

16 janvier 2014 - 18h-20h

Durée de l'épreuve : 2 heures

Aucun document n'est autorisé - Calculatrice non autorisée Barème

indicatif

1ère partie : Les prélèvements obligatoires (4 points)

1. Expliquez l'argumentation de Condorcet en faveur de la progressivité de l'impôt.

2ème partie : Le taux de socialisation du revenu ajusté des ménages (6 points)

- 1. Le taux de socialisation du revenu ajusté des ménages :
 - écrivez le calcul qui permet de le trouver. (0,5 point)
- expliquez ce qu'est le revenu ajusté des ménages et donnez une définition aussi précise et rigoureuse que possible des trois autres composantes permettant de calculer le ratio. (2 points)
- 2. Quelle est l'interprétation économique de ce ratio ? (1 point)
- 3. Dites comment ce ratio a évolué depuis 1960. (1 point)
- 4. Comment chacune de ces 3 composantes a-t-elle globalement évolué par rapport au RDA sur la période 1960-2012 ?(1,5 points)

3ème partie : Le ratio de dette publique ? (10 points)

A. (3 points) La contrainte budgétaire de l'Etat en France

 $\frac{D}{V}$

 $\frac{D_t}{Y}$ le ratio de dette publique, avec D_t la dette l'année t et Y_t le PIB l'année t.

- 1. Expliquez la contrainte budgétaire de l'Etat en énonçant l'équation comptable relative à l'évolution du ratio de dette publique. A partir de cette équation, expliquez les déterminants de l'évolution du ratio de dette publique. (1 point)
- 2. Après avoir décrit brièvement l'évolution du ratio de dette publique en France depuis le début des années 1980, expliquez le rôle joué par l'effet boule de neige dans cette évolution. (1 point)
- 3. On se situe dans le cadre d'analyse néoclassique. A partir de l'équation précédente, énoncez 2 conditions sous lesquelles une hausse du surplus primaire peut baisser le ratio de dette publique. (1 point)
- B. (4 points) Soit une économie en sous-emploi. On se situe dans un cadre keynésien dans lequel:
- le niveau de production dépend de la demande globale dont les composantes sont la consommation, l'investissement et les dépenses publiques, notées respectivement *C*, *I*, *G*. On suppose que *I* est exogène.
- les dépenses de consommation sont une fonction du revenu disponible, c'est-à-dire du revenu après versements des impôts, nets des transferts.

On notera

 $Y_d = Y - (T - Tr)$, avec Y le revenu, T les impôts, Tr les transferts.

$$m = \frac{\partial Y}{\partial x} = 1$$

- le multiplicateur de dépenses publiques:

 ∂G

- la variation de recettes fiscales (net des transferts) liée à une variation du PIB:

$$\tau = \frac{\partial (T - Tr)}{\partial Y} = 0.5$$

- 4. Calculez (1,5 points):
- Quelle est la variation du PIB (ΔY) suite à une augmentation des dépenses publiques de 10 (ΔG =10) ? Détaillez les mécanismes économiques qui conduisent à cet effet.
- Quelle est la variation des recettes fiscales [Δ (T-Tr)] suite à la variation du PIB ? Détaillez les mécanismes économiques qui conduisent à cet effet.
 - Quelle est alors la variation du solde budgétaire ? Commentez.

- 5. Calculez le ratio incrémental de dette, soit ΔY . En déduire le niveau du "multiplicateur de dépenses publiques financé par déficit"? Commentez. (1 point)

 6. Ecrivez la condition de premier ordre pour que le ratio de dette publique $\frac{D_t}{Y_t}$ baisse. (0,5 point)
- 7. En utilisant vos réponses aux questions 5 et 6, en déduire le niveau du ratio à partir duquel une hausse des dépenses publiques conduira à une réduction de $\frac{D_t}{Y_t}$. (0,5 point)
- 8. Comparez les hypothèses retenues quant au niveau des multiplicateurs dans ce modèle aux estimations qui en sont faites dans le cas de la France. (0,5 point)
- C. (3 points) A la lumière de ce qui précède, comment analyser la règle des 3% contenue dans le pacte de stabilité et de croissance (PSC) et celle des 0,5% mise en avant dans le Traité sur la stabilité, la coordination et la gouvernance au sein de l'union économique et monétaire (TSCG) ? Ces dispositifs sont-ils à même d'améliorer la situation des comptes publics ? Pourquoi ? Vous rédigerez une réponse concise et structurée.

UNIVERSITE PARIS 1 –UFR D'ECONOMIE ANNEE UNIVERSITAIRE 2013-2014

Licence 2ère année

Économie du budget, de la fiscalité et de la protection sociale Mercredi 18 juin 2014 - 17h-19h

Durée de l'épreuve : 2 heures Aucun document n'est autorisé - Calculatrice non autorisée Barème indicatif

Question 1 (5 points)

Quelles sont les principales caractéristiques de la structure fiscale française et quelles transformations a-t-elle connu au cours des deux dernières décennies ?

Question 2 (5 points)

Expliquez en quoi les administrations publiques contribuent à la formation du revenu des ménages.

Question 3 (5 points)

La contrainte budgétaire de l'État en France

Soit $\frac{D_t}{Y_t}$ le ratio de dette publique, avec D_t la dette l'année t et Y_t le PIB l'année t.

Soit une économie en sous-emploi. On se situe dans un cadre keynésien dans lequel:

- le niveau de production dépend de la demande globale dont les composantes sont la consommation, l'investissement et les dépenses publiques, notées respectivement C, I, G. On suppose que I est exogène.
- les dépenses de consommation sont une fonction du revenu disponible, c'est-à-dire du revenu après versements des impôts, nets des transferts. On notera $Y_d = Y (T Tr)$, avec Y le revenu, T les impôts, Tr les transferts.
- le multiplicateur de dépenses publiques: $m = \frac{\partial Y}{\partial G} = 1$
- la variation de recettes fiscales (net des transferts) liée à une variation du PIB:

$$\tau = \frac{\partial (T - Tr)}{\partial Y} = 0.5$$

Calculez:

- Quelle est la variation du PIB (\Box Y) suite à une augmentation des dépenses publiques de 10 (\Box G=10) ? Détaillez les mécanismes économiques qui conduisent à cet effet.
- Quelle est la variation des recettes fiscales $[\Box(T-Tr)]$ suite à la variation du PIB ? Détaillez les mécanismes économiques qui conduisent à cet effet.
- Quelle est alors la variation du solde budgétaire ? Commentez.

Calculez le ratio incrémental de dette, soit $\frac{\Delta D}{\Delta Y}$. En déduire le niveau du "multiplicateur de dépenses publiques financé par déficit" ? Commentez.

Écrivez la condition de premier ordre pour que le ratio de dette publique $\frac{D_t}{Y_t}$ baisse. En utilisant vos réponses aux questions précédentes, en déduire le niveau du ratio à partir duquel

En utilisant vos réponses aux questions précédentes, en déduire le niveau du ratio à partir duque une hausse des dépenses publiques conduira à une réduction de $\frac{D_t}{Y}$. Commentez ce résultat.

Question 4 (5 points)

Comment analyser la règle des 3% contenue dans le pacte de stabilité et de croissance (PSC) et celle des 0,5% mise en avant dans le Traité sur la stabilité, la coordination et la gouvernance au sein de l'union économique et monétaire (TSCG) ? Ces dispositifs sont-ils à même d'améliorer la situation des comptes publics ? Pourquoi ?

Partie A (9 points)

Soient
$$U_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 et $U_2=\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

1. Déterminer l'ensemble E des vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à U_1 et à U_2 .

Deux vecteurs de \mathbb{R}^n sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

E est donc l'ensemble des vecteurs
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
 tels que $\begin{cases} X * U_1 = 0 \\ X * U_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 2x \end{cases}$

$$x$$
 D'où E = $\{(-x), x \in \mathbb{R}\}$. C'est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $\{(-1)\}$. 2

2. Montrer que $U_3 = (1)$ appartient à E, puis que $\mathcal{B}_1 = \{U_1, U_2, U_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux.

Dans
$$U_3$$
, on a bien $\begin{cases} y = -x \\ z = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = -(-1) \\ -2 = 2 \times (-1) \end{cases}$

- Le vecteur U_3 est orthogonal à U_1 et à U_2 par construction
- Le vecteur U_1 est orthogonal à U_2 car $U_1 * U_2 = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0$

Les vecteurs sont donc bien orthogonaux deux à deux ce qui implique qu'ils sont linéairement indépendants.

Les vecteurs de \mathcal{B}_1 sont donc 3 vecteurs libres de \mathbb{R}^3 . Ils forment une base de \mathbb{R}^3 .

3. Soit la matrice d'ordre 3 : $\mathbf{M} = (U_1 \ U_2 \ U_3)$. Et soit \mathbf{M}' la matrice transposée de \mathbf{M} . Déterminer \mathbf{M}' et calculer le produit M'M.

- 4. En déduire:
 - a. l'inverse de la matrice \mathbf{M} , notée \mathbf{M}^{-1} ,

On voit que $\mathbf{M}'\mathbf{M}$ est diagonale, on n'est pas loin de la matrice identité. Si on divise la première ligne de \mathbf{M}' par 2, la

On voit que
$$\mathbf{M}'\mathbf{M}$$
 est diagonale, on n'est pas loin de la matrice identité. Si on divise la première seconde par 3 et la troisième par 6, on obtient $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ et le calcul du produit devient :

Mathématiques L2 - Examen du 8 janvier 2019 - SUJET 1 - TOUTES LES REPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIEES

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = 0$$

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = (1 - 1 - 1) = (0 - 1 - 0)$$

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = (1 - 1) = (0 - 1 - 0)$$

$$-\frac{1}{6} \frac{1}{6} = -\frac{2}{6}$$

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{6} = -\frac{2}{6}$$

b. les normes des vecteurs U_1 , U_2 et U_3 .

D'après le produit matriciel $\mathbf{M}'\mathbf{M}$, on voit que $U_1'U_1=2$. Or $||U_1||=\sqrt{U'U_1}$. On en déduit que $||U_1||=\sqrt{2}$. De même, $||U_2||=\sqrt{U'U_2}=\sqrt{3}$ et $||U_3||=\sqrt{U'U_3}=\sqrt{6}$.

5. Déduire des questions 2 et 4 une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . On notera $\mathcal{B}_2 = \{V_1, V_2, V_3\}$ cette base.

Une base orthonormée est une base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme unitaire. En divisant chacun des vecteurs de \mathcal{B}_1 par sa norme, on obtient une base formée de vecteurs orthogonaux deux à deux (puisque chacun est proportionnel au vecteur d'origine) et de norme unitaire.

On a donc
$$\mathcal{B}_2 = \begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{3}}{3}, & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2}{\sqrt{0}}, & (\frac{\sqrt{3}}{3}), & (-\frac{\sqrt{6}}{3}), \end{array} \}$$

6. Soit la matrice d'ordre 3 : $\mathbf{N} = (V_1 V_2 V_3)$. Déterminer la matrice \mathbf{N}^{-1} , inverse de la matrice \mathbf{N} .

$$V_2V_3$$
). Déterminer la matrice N^-

$$N = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$0 \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}}{3}$$
ont les colonnes sont orthogona

La matrice N étant orthogonale (matrice dont les colonnes sont orthogonales deux à deux et de norme unitaire),

son inverse est égale à sa transposée. On a donc : $\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

7. Donner les coordonnées du vecteur X = (2) dans la base \mathcal{B}_1 .

On résout MY = X.

Mathématiques L2 - Examen du 8 janvier 2019 - SUJET 1 - TOUTES LES REPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIEES

Les coordonnées du vecteur X dans la base \mathcal{B}_1 sont donc données par le vecteur Y=(1)

8. En déduire ses coordonnées dans la base \mathcal{B}_2 .

On vient de montrer que $X = 2 \times U_1 + 1 \times U_2 + (-1) \times U_3$

Or, par construction, on a : $V_i = \frac{U^i}{\|U_i\|} \text{et donc } U_i = \|U_i\|V_i$.

On peut en déduire que $X = 2 \times \sqrt{2} \times V_1 + 1 \times \sqrt{3} \times V_2 + (-1) \times \sqrt{6} \times V_3$

$$2\sqrt{2}$$

Les coordonnées du vecteur X dans la base \mathcal{B}_2 sont donc données par le vecteur $(\sqrt{3})$. $-\sqrt{6}$

Partie B (11 points)

Soit l'application linéaire $f(\cdot)$ définie par $f(X) = \mathbf{A}X$, avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A. Que pouvez-vous en déduire?

Par exemple, par la méthode de Sarrus,

$$D\acute{e}t(\mathbf{A}) = 5 \times 5 \times 2 + 1 \times 2 \times (-2) + (-2) \times 1 \times 2 - (-2) \times 5 \times (-2) - 5 \times 2 \times 2 - 1 \times 1 \times 2 = 0$$

On en déduit que la matrice A n'est pas de plein rang

2. Déterminer le rang de la matrice A.

On sait que $rang \mathbf{A} < 3$. Or on voit que les deux premières colonnes de \mathbf{A} ne sont pas proportionnelles. On en déduit que $rang \mathbf{A} = 2$.

3. En déduire une base de Imf.

Une base de Imf est donc formée par deux vecteurs libres de Imf. Or on sait que les colonnes de $\bf A$ sont des vecteurs de Imf et les deux premières ne sont pas proportionnelles. On peut donc choisir comme base de Imf le

système
$$\mathcal{B}_{Imf} = \{(1), (5)\}$$

$$-2 \qquad 2$$

4. Déterminer la dimension de l'ensemble Kerf puis en donner une base.

D'après le théorème des dimensions, en notant $E = \mathbb{R}^3$ l'ensemble de départ de $f(\cdot)$, on a:

dimKerf = dimE - dimImf.

On en déduit que :

$$dimKerf = 3 - rangf = 3 - 2 = 1.$$

Une base de Kerf est donc composée d'un vecteur non nul de Kerf c'est-à-dire d'un vecteur $X = (x_2)$ tels que x_3

$$\mathbf{A}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On résout le système en appliquant la méthode du pivot à la matrice élargie :

$$D'où : \mathbf{A}X = (0) \iff \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 24x_2 + 12x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{x}{2} & 3 \\ x_2 = -\frac{x}{2} & 3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le vecteur X = (-1) et l'une des solutions de ce système. C'est donc un vecteur de Kerf. 2

Une base de Kerf est formée par le système $\mathcal{B}_{Kerf} = \{(-1)\}$

Remarque:

on peut obtenir ce résultat intuitivement en remarquant que les colonnes de **A** sont telles que $C_2 = C_1 + 2C_3$.

5. L'application $f(\cdot)$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

L'image n'est pas égale à l'ensemble d'arrivée $F = \mathbb{R}^3$ puisque rangf < dimF: l'application n'est pas surjective. Le vecteur nul de F a une infinité d'antécédents puisque $dimKerf > 0 \Leftrightarrow rangf < dimE$: l'application n'est donc pas injective.

6. Effectuer le produit $\mathbf{A}U_1$ et montrer qu'il est égal à a_1U_1 , où a_1 est un réel. Déterminer a_1 .

$$\mathbf{A}U_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} = 6 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \times U_1$$

On en déduit que $a_1 = 6$

7. Quel nom donne-t-on à a_1 ? à U_1 ?

Par définition, on peut dire que a_1 est une valeur propre de \mathbf{A} et que U_1 est un vecteur propre de \mathbf{A} associé à la valeur propre a_1 .

8. Effectuer les produits AU_2 et AU_3 . Donner les coordonnées de ces vecteurs dans la base \mathcal{B}_1 .

Mathématiques L2 - Examen du 8 janvier 2019 - SUJET 1 - TOUTES LES REPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIEES

- Les coordonnées de $\mathbf{A}U_2$ dans la base \mathcal{B}_1 sont données par le vecteur (6) 0
 Les coordonnées de $\mathbf{A}U_3$ dans la base \mathcal{B}_1 sont données par le vecteur (0)
- 9. Comment peut-on appeler les vecteurs U_2 et U_3 relativement à la matrice **A** ? Même question pour les vecteurs V_1 , V_2 et V_3 .
 - Le vecteur U_2 est un vecteur propre de **A** associé à la valeur propre $a_2 = 6$ puisque $AU_2 = 6U_2$
 - Le vecteur U_3 est un vecteur propre de **A** associé à la valeur propre $a_3 = 0$ puisque $\mathbf{A}U_3 = 0U_3$
 - Le vecteur V_1 est un vecteur propre de $\bf A$ associé à la valeur propre $a_1=6$ puisque V_1 est proportionnel à U_1
 - Le vecteur V_2 est un vecteur propre de $\bf A$ associé à la valeur propre a_2 =6 puisque V_2 est proportionnel à U_2
 - Le vecteur V_3 est un vecteur propre de ${\bf A}$ associé à la valeur propre $a_3=0$ puisque V_3 est proportionnel à U_3
- 10. Déduire des questions précédentes la matrice **B** représentative de l'application linéaire $f(\cdot)$ par rapport à la base \mathcal{B}_1 .

Les colonnes de la matrice représentative de l'application linéaire $f(\cdot)$ par rapport à la base \mathcal{B}_1 sont par définition les coordonnées dans \mathcal{B}_1 des images par $f(\cdot)$ des vecteurs de \mathcal{B}_1 . On a défini ces coordonnées dans les questions 6 et 8. On a donc :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Calculer le produit matriciel :

Pourquoi pouvait-on prédire ce résultat ?

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 0 \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 6\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad 6\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad 6\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Mathématiques L2 - Examen du 8 janvier 2019 - SUJET 1 - TOUTES LES REPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIEES

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ce produit est égal à la matrice A.

Or, on a vu que la matrice $\mathbf{N} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}$ est une matrice de vecteurs propres de \mathbf{A} et que $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}'$. $(0 \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{6}}{3})$

En notant $\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice diagonale des valeurs propres correspondante, on a simplement obtenu le $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ résultat $\mathbf{A}=\mathbf{N}\mathbf{D}\mathbf{N}^{-1}$

Partie A (9 points)

Soient
$$U_1=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 et $U_2=\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

1. Déterminer l'ensemble E des vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à U_1 et à U_2 .

Deux vecteurs de \mathbb{R}^n sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

E est donc l'ensemble des vecteurs
$$X = \begin{pmatrix} x & x & y & y & z & 0 \\ y & tels & y & y & z & 0 \\ x & y & y & z & 0 \end{pmatrix}$$
 $\begin{cases} x & y & y & z & 0 \\ 2x & y & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & y & z & 0 \\ 2x & y & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & y & z & 0 \\ 2x & z & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & y & z & 0 \\ 2x & z & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z & 0 \\ 0 & z & 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & z$

$$\begin{cases} y = -z \\ x = -z \end{cases}.$$

$$-z$$
 -1 D'où E = $\{(-z)$, $z \in \mathbb{R}\}$. C'est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $\{(-1)\}$ ou, ce qui revient au même, z

l'ensemble des homothétiques du vecteur (-1).

2. Montrer que
$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 appartient à E, puis que $\mathcal{B}_1 = \{U_1, U_2, U_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 dont les vecteurs -1 sont orthogonaux deux à deux.

1
$$-1$$
 $U_3 = (1) = -(-1)$. C'est donc bien un homothétiques du vecteur (-1) , autrement dit un élément de E. -1 1

Tout ensemble libre de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 forme une base de \mathbb{R}^3 .

- Le vecteur U_3 est orthogonal à U_1 et à U_2 par construction
- Le vecteur U_1 est orthogonal à U_2 car $U_1 * U_2 = 0 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$

Les vecteurs sont donc bien orthogonaux deux à deux ce qui implique qu'ils sont linéairement indépendants.

Les vecteurs de \mathcal{B}_1 sont donc trois vecteurs libres de \mathbb{R}^3 . Ils forment une base de \mathbb{R}^3 dont les vecteurs sont en outre orthogonaux deux à deux.

3. Soit la matrice d'ordre 3 : $\mathbf{A} = (U_1 \ U_2 \ U_3)$. Et soit \mathbf{A}' la matrice transposée de \mathbf{A} . Déterminer \mathbf{A}' et calculer le produit $\mathbf{A}'\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = (1 \quad -1 \quad 1), \mathbf{A}' = (2 \quad -1 \quad 1) et \quad \mathbf{A}'\mathbf{A} = (2 \quad -1 \quad 1) (1 \quad -1 \quad 1) = (0 \quad 6 \quad 0) \\
1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 3$$

- 4. En déduire :
 - a. l'inverse de la matrice \mathbf{A} , notée \mathbf{A}^{-1} ,

Mathématiques L2 - Examen du 8 janvier 2019 - SUJET 2 - TOUTES LES REPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIEES

On voit que A'A est diagonale, on n'est pas loin de la matrice identité. Si on divise la première ligne de A' par 2, la

 $-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ $-\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ et le calcul du produit devient : $\frac{1}{3}$ seconde par 6 et la troisième par 3, on obtient

D'où
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}$$

b. les normes des vecteurs U_1 , U_2 et U_3 .

D'après le produit matriciel **A'A**, on voit que $U_1U_1=2$. Or $||U_1||=\sqrt{U'U_1}$. On en déduit que $||U_1||=\sqrt{2}$. De même, $||U_2|| = \sqrt{U'U_2} = \sqrt{6} \text{ et } ||U_3|| = \sqrt{U'U_3} = \sqrt{3}$.

5. Déduire des questions 2 et 4 une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . On notera $\mathcal{B}_2 = \{V_1, V_2, V_3\}$ cette base.

Une base orthonormée est une base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme unitaire. En divisant chacun des vecteurs de \mathcal{B}_1 par sa norme, on obtient une base formée de vecteurs orthogonaux deux à deux (puisque chacun est proportionnel au vecteur d'origine) et de norme unitaire.

On a donc
$$\mathcal{B}_2 = \begin{array}{ccc} 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , & -\frac{\sqrt{6}}{6} & , & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & (& \frac{\sqrt{6}}{6}) & (-\frac{\sqrt{3}}{3}) \end{array} \}$$

6. Soit la matrice d'ordre 3 : $\mathbf{B} = (V_1 \quad V_2 \quad V_3)$. Déterminer la matrice \mathbf{B}^{-1} , inverse de la matrice \mathbf{B} .

$$\mathbf{B} = (\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \quad \mathbf{V}_3) = \begin{array}{ccc} 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$
 La matrice \mathbf{B} étant orthogonale (matrice

La matrice **B** étant orthogonale (matrice dont les colonnes sont orthogonales deux à deux et de norme unitaire),

son inverse est égale à sa transposée. On a donc $\mathbf{B}^{-1} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 3 & 3 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

7. Donner les coordonnées du vecteur X = (4) dans la base \mathcal{B}_1 .

Les coordonnées du vecteur X dans la base \mathcal{B}_1 sont données par le vecteur Y solution du système : $\mathbf{A}Y = X$.

On résout $\mathbf{A}Y = X$.

8. En déduire ses coordonnées dans la base \mathcal{B}_2 .

On vient de montrer que $X = 2 \times U_1 + (-1) \times U_2 + 1 \times U_3$.

Or, par construction, on a : $V_i = \frac{u^i}{\|U_i\|} \text{donc } U_i = \|U_i\|V_i$.

On peut en déduire que $X = 2 \times \sqrt{2} \times V_1 + (-1) \times \sqrt{6} \times V_2 + 1 \times \sqrt{3} \times V_3$

 $2\sqrt{2}$

Les coordonnées du vecteur X dans la base \mathcal{B}_2 sont donc données par le vecteur $(-\sqrt{6})$. $\sqrt{3}$

Partie B (11 points)

Soit l'application linéaire $f(\cdot)$ définie par $f(X) = \mathbf{M}X$, avec $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de M. Que pouvez-vous en déduire ?

Par exemple, par la méthode de Sarrus,

$$D\acute{e}t(\mathbf{A}) = 2 \times 5 \times 5 + 2 \times 1 \times (-2) + (-2) \times 2 \times 1 - (-2) \times 5 \times (-2) - 2 \times 1 \times 1 - 2 \times 2 \times 5 = 0$$

On en déduit que la matrice **M** n'est pas de plein rang (c'est une matrice singulière).

2. Déterminer le rang de la matrice M.

On sait que $rang\mathbf{M} < 3$. Or on voit que les deux premières colonnes de \mathbf{M} ne sont pas proportionnelles. On en déduit que $rang\mathbf{M} = 2$.

3. En déduire une base de Imf.

Mathématiques L2 - Examen du 8 janvier 2019 - SUJET 2 - TOUTES LES REPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIEES

Une base de Imf est donc formée par deux vecteurs libres de Imf. Or on sait que les colonnes de ${\bf M}$ sont des vecteurs de Imf et les deux premières ne sont pas proportionnelles. On peut donc choisir comme base de Imf le

système
$$\mathcal{B}_{Imf} = \{(2), (5)\}$$

$$-2 \qquad 1$$

4. Déterminer la dimension de l'ensemble Kerf puis en donner une base.

D'après le théorème des dimensions, en notant $E = \mathbb{R}^3$ l'ensemble de départ de $f(\cdot)$, on a:

$$dimKerf = dimE - dimImf$$
.

On en déduit que :

$$dimKerf = 3 - rangf = 3 - 2 = 1.$$

 x_1

Une base de Kerf est donc composée d'un vecteur non nul de Kerf c'est-à-dire d'un vecteur $X=(x_2)$ tels que x_3

$$\mathbf{M}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On résout le système en appliquant la méthode du pivot à la matrice élargie :

Le vecteur X=(-1) est une des solutions de ce système. C'est donc un vecteur de Kerf. 1

Une base de Kerf est donc formée par le système $\mathcal{B}_{Kerf} = \{(-1)\}$

Remarque:

on peut obtenir ce résultat intuitivement en remarquant que les colonnes de **M** sont telles que $C_2 = 2C_1 + C_3$.

5. L'application $f(\cdot)$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

L'image n'est pas égale à l'ensemble d'arrivée $F = \mathbb{R}^3$ puisque rangf < dimF: l'application n'est pas surjective. Le vecteur nul de F a une infinité d'antécédents puisque $dimKerf > 0 \Leftrightarrow rangf < dimE$: l'application n'est donc pas injective.

6. Effectuer le produit $\mathbf{M}U_1$ et montrer qu'il est égal à m_1U_1 , où m_1 est un réel. Déterminer m_1 .

$$\mathbf{M}U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \times U_1$$

On en déduit que $m_1 = 6$

7. Quel nom donne-t-on à m_1 ? à U_1 ?

Par définition, on peut dire que $m_1 = 6$ est une valeur propre de \mathbf{M} et que U_1 est un vecteur propre de \mathbf{M} associé à la valeur propre $m_1 = 6$.

8. Effectuer les produits $\mathbf{M}U_2$ et $\mathbf{M}U_3$. Donner les coordonnées de ces vecteurs dans la base \mathcal{B}_1 .

Mathématiques L2 - Examen du 8 janvier 2019 - SUJET 2 - TOUTES LES REPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIEES

• Les coordonnées de $\mathbf{M}U_2$ dans la base \mathcal{B}_1 sont données par le vecteur (0)

0

- Les coordonnées de $\mathbf{M}U_3$ dans la base \mathcal{B}_1 sont données par le vecteur (0)
- 9. Comment peut-on appeler les vecteurs U_2 et U_3 relativement à la matrice **M** ? Même question pour les vecteurs V_1 , V_2 et V_3 .
 - Le vecteur U_2 est un vecteur propre de \mathbf{M} associé à la valeur propre $m_2 = 0$ puisque $\mathbf{M}U_2 = 0U_2$
 - Le vecteur U_3 est un vecteur propre de **M** associé à la valeur propre $m_3 = 6$ puisque $\mathbf{M}U_3 = 6U_3$
 - Le vecteur V_1 est un vecteur propre de ${\bf M}$ associé à la valeur propre $m_1=6$ puisque V_1 est proportionnel à U_1
 - Le vecteur V_2 est un vecteur propre de ${\bf M}$ associé à la valeur propre $m_2=0$ puisque V_2 est proportionnel à U_2
 - Le vecteur V_3 est un vecteur propre de ${\bf M}$ associé à la valeur propre $m_3=6$ puisque V_3 est proportionnel à U_3
- 10. Déduire des questions précédentes la matrice **N** représentative de l'application linéaire $f(\cdot)$ par rapport à la base \mathcal{B}_1 .

Les colonnes de la matrice représentative de l'application linéaire $f(\cdot)$ par rapport à la base \mathcal{B}_1 sont par définition les coordonnées dans \mathcal{B}_1 des images par $f(\cdot)$ des vecteurs de \mathcal{B}_1 . On a défini ces coordonnées dans les questions 6 et 8. On a donc :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

11. Calculer le produit matriciel :

Pourquoi pouvait-on prédire ce résultat ?

Mathématiques L2 - Examen du 8 janvier 2019 – SUJET 2 - TOUTES LES REPONSES DOIVENT ETRE JUSTIFIEES

Ce produit est égal à la matrice M. Le résultat était prévisible puisque :

Or on a vu que **B** est une matrice de vecteurs propres de **M** et que $B^{-1} = B'$.

En notant $\mathbf{D} = (0 \quad 0 \quad 0)$, la matrice diagonale des valeurs propres correspondante, on a simplement obtenu le $0 \quad 0 \quad 6$

résultat $M = BNB^{-1}$.

EXERCICE 1 (6 points) – Soient les matrices :

$$\mathbf{M} = (\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \mathbf{M} = (\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -2 \end{array}) \text{ et } \mathbf{N} = (\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}).$$

$$1 & 1 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}$$

1. Effectuer le produit MN. (0,5 point)

$$\mathbf{MN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2. En déduire :
 - a. Que les colonnes de **M** forment une base \mathcal{B}_M de IR³ et que celles de N forment une autre base \mathcal{B}_N de IR³. (1 point) Tout ensemble libre de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 est une base de \mathbb{R}^3 .

Les trois colonnes de **M** (respectivement de **N**) sont bien des vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Comme $MN = I_3$, la matrice N est l'inverse de la matrice M (et réciproquement). On en déduit que M et N sont inversibles et par conséquent qu'elles sont de plein rang.

Les trois colonnes de **M** (respectivement de **N**) sont donc trois vecteurs de \mathbb{R}^3 linéairement indépendants. Elles

forment donc une base de
$$\mathbb{R}^3$$
: avec $\mathcal{B}_A = \{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (-2) \end{pmatrix}$ et respectivement $\mathcal{B}_B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ $\{(-6)\}$

2

- b. Les coordonnées du vecteur U = (0) dans chacune de ces bases. (1 point)
 - Soit V le vecteur des coordonnées de U dans \mathcal{B}_{M_r} il est tel que : $\mathbf{M}V = U$. Or $\mathbf{M}V = U \Leftrightarrow V = \mathbf{M}^{-1}U = \mathbf{N}U$.

Or
$$\mathbf{M}V = U \Leftrightarrow V = \mathbf{M}^{-1}U = \mathbf{N}U$$
.
On en déduit : $V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2$

• Soit W le vecteur des coordonnées de U dans \mathcal{B}_{N_r} il est tel que : $\mathbf{N}W = U$.

Or
$$\mathbf{N}W = U \iff W = \mathbf{N}^{-1}U = \mathbf{M}U$$
.
 $-1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad -1$
On en déduit : $W = (\quad 0 \quad 1 - 2) \quad (0) = (-2)$
 $1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3$

3. Montrer que les vecteurs de \mathcal{B}_M sont orthogonaux deux à deux. (1 point)

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Ainsi:

Les trois vecteurs de \mathcal{B}_M sont donc orthogonaux deux à deux.

4. Calculer la norme de chacun des vecteurs de \mathcal{B}_M . (1 point)

$$||(0)|| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|(1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\|(-2)\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

5. En déduire:

a. une base orthonormée de IR³. (0,5 point)

Une base orthonormée est une base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme unitaire.

Les vecteurs de B_M sont orthogonaux deux à deux, mais leur norme n'est pas égale à 1.

Pour obtenir une base orthonormée, on divise chacun des vecteurs de \mathcal{B}_M par sa norme. On en déduit la base orthonormée:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{4}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

b. Les coordonnées du vecteur U = (0) dans cette base. (0.5 point)

Notons V_1 , V_2et V_3 les trois vecteurs de \mathcal{B}_M respectivement, et W_1 , W_2et W_3 les trois vecteurs de \mathcal{B} respectivement.

- $W_1 = \frac{V_1}{V_2}$ et donc $V_1 = \sqrt{2W_1}$
- $W_2 = \frac{V_2}{3}$ et donc $V_2 = \sqrt{3}W_2$
- et $W_3 = \frac{V_3}{\sqrt{6}}$ et donc : $V_3 = \sqrt{6W_3}$.

On sait (question 2b) que $U = -\frac{1}{2}V_1 + V_2 + \frac{1}{2}V_3$. On en déduit que $U = -\frac{\sqrt{2}}{2}W_1 + \sqrt{3}W_2 + \frac{\sqrt{6}}{2}W_3$

Les coordonnées de U dans la base \mathcal{B} sont donc données par le vecteur

Une matrice **P** telle que $P^{-1} = P'où P'$ est la transposée de **P**. (0,5 point)

Les vecteurs d'une base orthonormée forment une matrice orthogonale dont l'inverse est égale à la transposée. On a donc:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 (14 points)

Soit $f(\cdot)$ l'application linéaire de IR³ dans IR³, définie par f(X) = AX, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

Partie 1 (2,5 points)

1. Calculer le déterminant de A. (1 point)

Par la méthode des cofacteurs, en développant par rapport à la première colonne et en notant c_{ij} le cofacteur du terme situé ligne i et colonne j

$$0 1 2$$

$$Det (1 1 a) = 0 \times c_{11} + 1 \times c_{21} + 2 \times c_{31}$$

$$2 1 0$$

$$= 0 + 1 \times (-1)^{2+1} \times Det (\frac{1}{2}) + 2 \times (-1)^{3+1} \times Det (\frac{1}{2})$$

$$1 0 1 a$$

$$= 1 \times (-1) \times (-2) + 2 \times 1 \times (a - 2)$$

On a donc : Det(A) = 2a - 2

- 2. En déduire :
 - a. la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) 0 est valeur propre de la matrice A. (0,5 point) 0 est une valeur propre de A si $Det(A OI_3) = Det(A) = 0$ ce qui est le cas si a = 1.
 - b. la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) l'application $f(\cdot)$ est injective, surjective, bijective. (1 point) Comme l'application $f(\cdot)$ a le même espace d'arrivée que de départ (on dit que c'est un isomorphisme), elle est injective, surjective et bijective aux mêmes conditions. Il faut pour cela que la matrice soit de plein rang, c'est-à-dire que son déterminant soit non nul. On doit donc avoir $a \neq 1$.

Partie 2 : On suppose que a = 1.

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 2 \\
 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\
 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Le système AX = Ya-t-il une solution quel que soit le vecteur Y de IR^3 (on répondra à cette question sans effectuer aucun calcul) ? (0,5 point)

Pour a = 1, l'application n'est pas sujective. Le système n'admet donc pas toujours une solution. (Il n'en admet une que si Y appartient à Imf)

2. Sans effectuer aucun calcul, peut-on dire si la matrice **A** est diagonalisable ? (0,5 point)

Pour a = 1, la matrice **A** est symétrique. Elle est donc diagonalisable.

3. Déterminer le rang de A. (1 point)

La matrice est d'ordre 3 et n'est pas de plein rang, d'où rangA < 3.

Or, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, d'où rang $A \ge 2$.

On a donc : rang A = 2.

4. En déduire la dimension de l'ensemble Imf, puis donner une base de Imf. (1 point)

Par définition, $\dim Imf = \operatorname{rang} \mathbf{A}$. On a donc $\dim Imf = 2$.

Une base de Imf est formée de deux vecteurs linéairement indépendants de Imf. Or ceci est le cas des deux

premières colonnes de **A**, qui forment un système libre : $\{(1), (1)\}$.

5. Quelle est la dimension de ker**A** ? Déterminer une base de ker**A**. (1 point)

 $\operatorname{Ker} \mathbf{A} = \operatorname{ker} f$. Or, d'après le théorème des dimensions, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f$.

D'où : $\dim Kerf = 3 - 2 = 1$.

On pouvait aussi écrire directement :

D'après le théorème des dimensions :

dimker**A** = nombre de colonnes de **A** – rang**A**,

D'où : dimKerA = 1.

Tout ensemble formé d'un vecteur non nul de kerA est donc une base de kerA.

Pour former une base de ker**A**, il faut donc un vecteur non nul tel que $\mathbf{A}X = \vec{0}_3$.

On peut remarquer que $C_1 - 2C_2 + C_3 = \vec{0}_3$ où C_i est la $i^{\grave{e}me}$ colonne de **A**. Le vecteur X = (-2) appartient donc à

ker A. Comme il est non nul, il forme une base, $B_{ker A}$, de ker A:

$$B_{kerA} = \{(-2)\}$$

6. Déduire de ce qui précède une valeur propre de **A** . (0,5 point)

Comme dimker $\mathbf{A} = 1$, il existe un vecteur P non nul tel que $\mathbf{A}P = 0P = \vec{0}$. Le réel 0 est donc une valeur propre de A. Remarque : on retrouve ici le résultat vu partie 1 que si a = 1, 0 est une valeur propre de A.

- 7. Soit la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A} 3\mathbf{I}_3$, où \mathbf{I}_3 est la matrice identité d'ordre 3 :
- a. Déterminer le rang de **B**. (0,5 point)

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - 3\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = \vec{0}_3$ où C_i est la $i^{ème}$ colonne de **B**. On en déduit que rang **B** < 3. Comme les deux premières colonnes de **B** ne sont pas proportionnelles, on peut conclure que rang **B** = 2.

b. En déduire une valeur propre de la matrice **A**. (0,5 point)

Comme la matrice **B** n'est pas de plein rang, on en déduit que son déterminant est nul. Or si $Det(A - 3I_3) = 0$, cela implique que 3 est une valeur propre de **A**.

- 8. Soit l'ensemble $E = \{X \in \mathbb{R}^3 / f(X) = -2X\}$.
 - a. Montrer que *E* est un sous-espace vectoriel de IR³. (1 point)

METHODE 1

E est un sous-espace vectoriel de IR³ s'il est une partie non vide de IR³ et s'il est stable pour la somme vectorielle et l'homothétie.

1 : *E* est une partie de IR³ car ses vecteurs sont des vecteurs de IR³.

2 : E est non vide car il contient le vecteur nul de IR³ : comme $f(\cdot)$ est une application linéaire de IR³ dans IR³, ona $f(0_3) = \vec{0}_3$. D'où : $f(0_3) = -2\vec{0}_3$.

3 : Stabilité pour la somme vectorielle. Soient X et X' deux vecteurs de E. Montrons alors que X + X' E E.

 $X \in E$ et $X' \in E$, on a donc f(X) = -2X et f(X') = -2X'.

On a donc -2X+(-2X') = f(X)+f(X')

Ce qui donne -2(X + X') = f(X + X') puisque $f(\cdot)$ est une application linéaire.

On a donc bien : $X + X' \in E$; E est stable pour la somme vectorielle.

4: Stabilité pour l'homothétie. Soit un vecteur X de E et λ un réel. Montrons que $\lambda X \in E$.

 $X \in E$, on a donc f(X) = -2X.

D'où : $\lambda f(X) = \lambda(-2X)$.

Ce qui donne : $f(\lambda X) = -2(\lambda X)$ puisque $f(\cdot)$ est linéaire.

On a donc bien : $\lambda X \in E$; E est stable pour la somme l'homothétie.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de IR 3 .

METHODE 2

De : f(X) = -2X, ou encore, de $\mathbf{A}X = -2X$,

on déduit:

[1]
$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})X = \vec{0}$$

L'ensemble E est donc ker($\mathbf{A}+2\mathbf{I}$). C'est donc un sous-espace vectoriel de l'espace de départ de l'application linéaire $g(\cdot)$ définie par $g(X) = (\mathbf{A}+2\mathbf{I})X$, qui est IR^3 puisque $\mathbf{A}+2\mathbf{I}$ a trois colonnes.

b. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? (0,5 point)

Suite la de méthode 2 de la question prédécente :

Comme:

Rang(**A** + 2**I**) = rang (1 3 1)
$$L_2$$
 = rang (0 5 0) L' = L_1 : pivot
2 1 2 L_3 0 0 0 L' = L_3 = L_3 - L_1

- Rang(A + 2I)<3 car la matrice triangulaire obtenue par la méthode du pivot de Gauss comporte un zéro sur sa diagonale principale
- Rang($\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$) ≥ 2 car ses deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles

On en déduit que Rang(A + 2I)=2

D'où : dimker($\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$) = nombre de colonnes de ($\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$) - rang($\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$) = 3 - 2 = 1. Conclusion : dimE = 1.

- c. En déduire une valeur propre de la matrice **A**. (0,5 point)

 Comme dimker(**A**+2**I**) = 1, il existe un vecteur *P* non nul tel que (**A** + 2**I**) $P = \vec{0}$ donc tel que **A**P = -2P. On en déduit que -2 est une valeur propre de **A**.
- 9. Calculer la trace de la matrice **A** et vérifier sur le résultat que vous obtenez est cohérent avec vos résultats précédents. (1 point)
 - $Tr(\mathbf{A}) = 0 + 1 + 0 = 1$ (somme des termes de la diagonale principale de \mathbf{A})
 - Comme **A** est une matrice d'ordre 3, elle a trois valeurs propres. La somme des valeurs propres de **A** est donc 0 + 3 2 = 1(trois valeurs propres déterminées dans les questions précédentes).
 - L'égalité somme des valeurs propres = trace est donc bien vérifiée.
- 10. Montrer que les colonnes de la matrice **M** étudiée dans l'exercice 1 sont des vecteurs propres de **A** en précisant pour chacun d'eux la valeur propre de **A** à laquelle il est associé. (1,5 point)

Levecteur (0) est donc un vecteur propre de **A** associé à la valeur propre -2.

Le vecteur (1) est donc un vecteur propre de ${\bf A}$ associé à la valeur propre 3.

Le vecteur (-2) est donc un vecteur propre de **A** associé à la valeur propre 0.

Les trois colonnes (0), (1) et (-2) de la matrice M sont donc bien des vecteurs propres de A

1 1 1
associés aux valeurs propres - 2, 3 et 0 respectivement.

- 11. En déduire que l'on peut écrire **A** sous la forme : **MDN**, où **M** et **N** sont les matrices de l'exercice 1 est où **D** est une matrice diagonale que l'on précisera. (1 point)
 - La matrice **A** on l'a vu est diagonalisable puisqu'elle est symétrique.

- On a donc **A** = **MDM** ⁻¹, où **D** est une matrice diagonale des valeurs propres de **A** et où **M** est une matrice de vecteurs propre de **A** correspondante.
- On a vu que la matrice **M** de l'exercice 1 était une matrice de vecteur propres de **A**. Comme la matrice **N** de l'exercice 1 est l'inverse de **M**, on a donc : **A** = **MDN**.
- Pour déterminer **D** il faut prendre garde à l'ordre des valeurs propres en cohérence avec l'ordre des vecteurs propres dans **M** :

$$\mathbf{D} = (\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

12. Peut-on écrire : **A** = **PDP**′ où **P** est la matrice définie dans l'exercice 1 et **P**′ sa transposée? (0,5 point)

Si **M** est une matrice de vecteurs propres de **A**, alors **P** l'est aussi car chacune de ses colonnes est définie proportionnellement à la colonne correspondante dans **M**. On a donc bien $\mathbf{A} = \mathbf{PDP^{-1}}$ et comme $\mathbf{P^{-1}} = \mathbf{P'}$ (voir exercice 1), on peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{PDP'}$.

EXERCICE 1 (6 points) – Soient les matrices :

A =
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
 et B = $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

1. Effectuer le produit **AB**. (0,5 point)

- 2. En déduire :
 - a. Que les colonnes de **A** forment une base \mathcal{B}_A de IR³ et que celles de **B** forment une autre base \mathcal{B}_B de IR³. (1 point) Tout ensemble libre de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 est une base de \mathbb{R}^3 .

Les trois colonnes de **A** (respectivement de **B**) sont bien des vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Comme $AB = I_3$, la matrice B est l'inverse de la matrice A (et réciproquement). On en déduit que A et B sont inversibles et par conséquent qu'elles sont de plein rang.

Les trois colonnes de **A** (respectivement de **B**) sont donc trois vecteurs de \mathbb{R}^3 linéairement indépendants. Elles

forment donc une base de
$$\mathbb{R}^3$$
: avec $\mathcal{B}_A = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ et respectivement $\mathcal{B}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$)

1

- b. Les coordonnées du vecteur U = (0) dans chacune de ces bases. (1 point)
 - Soit V le vecteur des coordonnées de U dans \mathcal{B}_{A_J} il est tel que : $\mathbf{A}V = U$. Or $\mathbf{A}V = U \Leftrightarrow V = \mathbf{A}^{-1}U = \mathbf{B}U$.

On en déduit :
$$V = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/ & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

• Soit W le vecteur des coordonnées de U dans \mathcal{B}_{B_r} il est tel que : $\mathbf{B}W = U$.

$$0r \ \textbf{\textit{BW}} = \textbf{\textit{U}} \Longleftrightarrow \textbf{\textit{W}} = \textbf{\textit{B}}^{-1}\textbf{\textit{U}} = \textbf{\textit{A}}\textbf{\textit{U}}.$$

$$1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 3$$

$$0n \ \text{en d\'eduit} : \textbf{\textit{W}} = (1 \quad 0 - 2) \ (0) = (-3)$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

3. Montrer que les vecteurs de \mathcal{B}_A sont orthogonaux deux à deux. (1 point)

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Ainsi :

Les trois vecteurs de \mathcal{B}_A sont donc orthogonaux deux à deux.

4. Calculer la norme de chacun des vecteurs de \mathcal{B}_A . (1 point)

$$\begin{vmatrix}
1 \\
|(1)|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\
1 \\
-1 \\
|(0)|| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
1 \\
1 \\
|(-2)|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}
\end{vmatrix}$$

5. En déduire :

une base orthonormée de IR3. (0,5 point)

Une base orthonormée est une base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme unitaire. Les vecteurs de \mathcal{B}_A sont orthogonaux deux à deux, mais leur norme n'est pas égale à 1.

Pour obtenir une base orthonormée, on divise chacun des vecteurs de \mathcal{B}_A par sa norme. On en déduit la base orthonormée:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3}{8}} = \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\{(\frac{\sqrt{3}}{3}), (\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{6}}{6})\}$$

b. Les coordonnées du vecteur U = (0) dans cette base. (0,5 point)

Notons V_1 , V_2 et V_3 les trois vecteurs de \mathcal{B}_A respectivement, et W_1 , W_2 et W_3 les trois vecteurs de \mathcal{B}_A respectivement.

•
$$W_1 = \frac{V_1}{\sqrt{3}}$$
, et donc $V_1 = \sqrt{3}\overline{W}_1$

•
$$W_2 = \frac{V_2}{\sqrt{2}}$$
, et donc $V_2 = \sqrt{2W_2}$

•
$$et W_3 = \frac{V_3}{\sqrt{6}} et donc : V_3 = \sqrt{6W_3}$$
.

On sait (question 2b) que $U = V_1 + \frac{1}{2}V_2 + \frac{1}{2}V_3$. On en déduit que $U = \sqrt{3}W_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}W_2 + \frac{\sqrt{6}}{2}W_3$

$$\sqrt{3}$$
 $\sqrt{2}$

Les coordonnées de U dans la base $\mathcal B$ sont donc données par le vecteur $_2$

$$(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{4}}$$

Une matrice **C** telle que $C^{-1} = C'$. (0,5 point)

Les vecteurs d'une base orthonormée forment une matrice orthogonale dont l'inverse est égale à la transposée. On a donc:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}$$

EXERCICE 2 (14 points)

Soit $f(\cdot)$ l'application linéaire de IR³ dans IR³, définie par $f(X) = \mathbf{M}X$, avec $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Partie 1 (2,5 points)

1. Calculer le déterminant de M. (1 point)

Par la méthode des cofacteurs, en développant par rapport à la deuxième colonne et en notant c_{ij} le cofacteur du terme situé ligne i et colonne j

$$\begin{array}{rcl}
-1 & -2 & a \\
Det (-2 & 0 & -2) = -2 \times c_{12} + 0 \times c_{22} - 2 \times c_{32} \\
-1 & -2 & -1 \\
& = -2 \times (-1)^{1+2} \times Det \left(\begin{array}{cc} -2 & -2 \\
-1 & -1 & -1 \\
& = -2 \times (-1) \times 0 - 2 \times (-1) \times (2 + 2a)\end{array}\right)$$

On a donc : Det(M) = 4 + 4a

- 2. En déduire :
 - a. la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) 0 est valeur propre de la matrice M. (0,5 point) 0 est une valeur propre de M si $Det(M-0I_3)=Det(M)=0$ ce qui est le cas si a=-1.
 - b. la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) l'application $f(\cdot)$ est injective, surjective, bijective. (1 point) Comme l'application $f(\cdot)$ a le même espace d'arrivée que de départ (on dit que c'est un isomorphisme), elle est injective, surjective et bijective aux mêmes conditions. Il faut pour cela que la matrice soit de plein rang, c'est-à-dire que son déterminant soit non nul. On doit donc avoir $a \neq -1$.

Partie 2 : On suppose que a = -1.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Le système MX = Y a-t-il une solution quel que soit le vecteur Y de IR^3 (on répondra à cette question sans effectuer aucun calcul) ? (0,5 point)

Pour a = -1, l'application n'est pas sujective. Le système n'admet donc pas toujours une solution. (Il n'en admet une que si Y appartient à Imf)

2. Sans effectuer aucun calcul, peut-on dire si la matrice **M** est diagonalisable ? (0,5 point)

Pour a = -1, la matrice **M** est symétrique. Elle est donc diagonalisable.

3. Déterminer le rang de **M**. (1 point)

La matrice est d'ordre 3 et n'est pas de plein rang, d'où rang $\mathbf{M} < 3$.

Or, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, d'où rang $M \ge 2$.

On a donc : $rang \mathbf{M} = 2$.

4. En déduire la dimension de l'ensemble Imf, puis donner une base de Imf. (1 point)

Par définition, $\dim Imf = \operatorname{rang} \mathbf{M}$. On a donc $\dim Imf = 2$.

Une base de Imf est formée de deux vecteurs linéairement indépendants de Imf. Or ceci est le cas des deux

premières colonnes de **M**, qui forment un système libre : $\{(-2), (0)\}$. -1 -2

5. Quelle est la dimension de ker**M** ? Déterminer une base de ker**M**. (1 point)

 $\operatorname{Ker} \mathbf{M} = \operatorname{ker} f$. Or, d'après le théorème des dimensions, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f$.

D'où : $\dim Kerf = 3 - 2 = 1$.

On pouvait aussi écrire directement :

D'après le théorème des dimensions :

dimkerM = nombre de colonnes de M - rangM,

D'où : $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{M} = 1$.

Tout ensemble formé d'un vecteur non nul de kerM est donc une base de kerM.

Pour former une base de ker**M**, il faut donc un vecteur non nul tel que $\mathbf{M}X = \vec{0}_3$.

On peut remarquer que $C_1 + 0C_2 - C_3 = \vec{0}_3$ où C_i est la $i^{\grave{e}me}$ colonne de **M**. Le vecteur X = (0) appartient donc à -1

kerM. Comme il est non nul, il forme une base, B_{kerM} , de kerM:

$$B_{ker\mathbf{M}} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

6. Déduire de ce qui précède une valeur propre de **M** . (0,5 point)

Comme dimker $\mathbf{M} = 1$, il existe un vecteur P non nul tel que $\mathbf{M}P = 0P = \vec{0}$. Le réel 0 est donc une valeur propre de \mathbf{M} . Remarque : on retrouve ici le résultat vu partie 1 question 1 que si a = -1, 0 est une valeur propre de \mathbf{M} .

- 7. Soit la matrice $N = M 2I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3:
 - c. Déterminer le rang de N. (0,5 point)

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 - 2C_2 + C_3 = \vec{0}_3$ où C_i est la $i^{ème}$ colonne de **N**. On en déduit que rang **N** < 3. Comme les deux premières colonnes de **N** ne sont pas proportionnelles, on peut conclure que rang **N** = 2.

d. En déduire une valeur propre de la matrice **M**. (0,5 point)

Comme la matrice N n'est pas de plein rang, on en déduit que son déterminant est nul. Or si $Det(M-2I_3)=0$, cela implique que 2 est une valeur propre de M.

- 8. Soit l'ensemble $E = \{X \in \mathbb{R}^3 / f(X) = -4X\}$.
 - d. Montrer que *E* est un sous-espace vectoriel de IR³. (1 point)

METHODE 1

E est un sous-espace vectoriel de IR^3 s'il est une partie non vide de IR^3 et s'il est stable pour la somme vectorielle et l'homothétie.

1: E est une partie de IR³ car ses vecteurs sont des vecteurs de IR³.

2 : E est non vide car il contient le vecteur nul de IR³ : comme $f(\cdot)$ est une application linéaire de IR³ dans IR³, ona $\vec{f}(0_3) = \vec{0}_3$. D'où : $\vec{f}(0_3) = -40_3$.

3 : Stabilité pour la somme vectorielle. Soient X et X' deux vecteurs de E. Montrons alors que X + X' E E.

 $X \in E$ et $X' \in E$, on a donc f(X) = -4X et f(X') = -4X'.

On a donc -4X+(-4X') = f(X)+f(X')

Ce qui donne -4(X + X') = f(X + X') puisque $f(\cdot)$ est une application linéaire.

On a donc bien : $X + X' \in E$; E est stable pour la somme vectorielle.

4 : Stabilité pour l'homothétie. Soit un vecteur X de E et λ un réel. Montrons que $\lambda X \in E$.

 $X \in E$, on a donc f(X) = -4X.

D'où : $\lambda f(X) = \lambda(-4X)$.

Ce qui donne : $f(\lambda X) = -4(\lambda X)$ puisque $f(\cdot)$ est linéaire.

On a donc bien : $\lambda X \in E$; E est stable pour la somme l'homothétie.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de IR 3 .

METHODE 2

De : f(X) = -4X, ou encore, de MX = -4X,

on déduit:

[1]
$$(\mathbf{M} + 4\mathbf{I})X = \vec{0}$$

L'ensemble E est donc ker(\mathbf{M} + 4 \mathbf{I}). C'est donc un sous-espace vectoriel de l'espace de départ de l'application linéaire $g(\cdot)$ définie par $g(X) = (\mathbf{M} + 4\mathbf{I})X$, qui est IR³ puisque $\mathbf{M} + 4\mathbf{I}$ a trois colonnes.

e. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? (0,5 point)

Suite la de méthode 2 de la question prédécente :

Comme:

- la Somme des trois colonnes est égale au vecteur nul.
- Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles

D'où : dimker($\mathbf{M} + 4\mathbf{I}$) = nombre de colonnes de ($\mathbf{M} + 4\mathbf{I}$) - rang($\mathbf{M} + 4\mathbf{I}$) = 3 - 2 = 1. Conclusion : dimE = 1.

f. En déduire une valeur propre de la matrice **A**. (0,5 point)

Comme dimker($\mathbf{M} + 4\mathbf{I}$) = 1, il existe un vecteur P non nul tel que ($\mathbf{M} + 4\mathbf{I}$) $P = \vec{0}$ donc tel que $\mathbf{M}P = -4P$. On en déduit que -4 est une valeur propre de \mathbf{M} .

- 9. Calculer la trace de la matrice **M** et vérifier sur le résultat que vous obtenez est cohérent avec vos résultats précédents. (1 point)
 - $Tr(\mathbf{M}) = -1 + 0 1 = -2$ (somme des termes de la diagonale principale de \mathbf{M})
 - Comme **M** est une matrice d'ordre 3, elle a trois valeurs propres. La somme des valeurs propres de **M** est donc 0 + 2 4 = -2 (trois valeurs propres déterminées dans les questions précédentes).
 - L'égalité somme des valeurs propres = trace est donc bien vérifiée.
- 10. Montrer que les colonnes de la matrice **A** étudiée dans l'exercice 1 sont des vecteurs propres de **M** en précisant pour chacun d'eux la valeur propre de **M** à laquelle il est associé. (1,5 point)

Le vecteur (1) est donc un vecteur propre de **M** associé à la valeur propre -4.

Le vecteur (0) est donc un vecteur propre de **M** associé à la valeur propre 0.

Le vecteur (-2) est donc un vecteur propre de **M** associé à la valeur propre 2.

1 -1 1 Les trois colonnes (1), (0) et (-2) de la matrice **A** sont donc bien des vecteurs propres de **M**

1 1 1 associés aux valeurs propres – 4, 0 et 2 respectivement.

- 11. En déduire que l'on peut écrire **M** sous la forme : **ADB**, où **A** et **B** sont les matrices de l'exercice 1 est où **D** est une matrice diagonale que l'on précisera. (1 point)
 - La matrice **M** on l'a vu est diagonalisable puisqu'elle est symétrique.
 - On a donc **M** = **ADA** 1, où **D** est une matrice diagonale des valeurs propres de **M** et où **A** est une matrice de vecteurs propre de **M** correspondante.

35

- On a vu que la matrice **A** de l'exercice 1 était une matrice de vecteur propres de **M**. Comme la matrice **B** de l'exercice 1 est l'inverse de **A**, on a donc : **M** = **ADB**.
- Pour déterminer **D** il faut prendre garde à l'ordre des valeurs propres en cohérence avec l'ordre des vecteurs propres dans **A** :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Peut-on écrire : **M** = **CDC**′ où **C** est la matrice définie dans l'exercice 1 et **C**′ sa transposée ? (0,5 point)

Si **A** est une matrice de vecteurs propres de **M**, alors **C** l'est aussi car chacune de ses colonnes est définie proportionnellement à la colonne correspondante dans **A**. On a donc bien $\mathbf{M} = \mathbf{CDC^{-1}}$ et comme $\mathbf{C^{-1}} = \mathbf{C'}$ (voir exercice 1), on peut écrire $\mathbf{M} = \mathbf{CDC'}$.

EXERCICE 1 (6 points) – Soient les matrices :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Effectuer le produit MN. (0,5 point)

- 2. En déduire :
 - a. Que les colonnes de **M** forment une base \mathcal{B}_M de IR³ et que celles de N forment une autre base \mathcal{B}_N de IR³. (1 point) Tout ensemble libre de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 est une base de \mathbb{R}^3 .

Les trois colonnes de **M** (respectivement de **N**) sont bien des vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Comme MN = I₃, la matrice N est l'inverse de la matrice M (et réciproquement). On en déduit que M et N sont inversibles et par conséquent qu'elles sont de plein rang.

Les trois colonnes de **M** (respectivement de **N**) sont donc trois vecteurs de \mathbb{R}^3 linéairement indépendants. Elles

forment donc une base de
$$\mathbb{R}^3$$
: avec $\mathcal{B}_M = \{ (-2)^1, (1)^{-1}, (0) \}$ et respectivement $\mathcal{B}_N = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, (\frac{1}{3})^3, (\frac{1}{3})^$

- b. Les coordonnées du vecteur U = (1) dans chacune de ces bases. (1 point)
 - Soit V le vecteur des coordonnées de U dans \mathcal{B}_{M_r} il est tel que : $\mathbf{M}V = U$.

Or
$$\mathbf{M}V = U \Leftrightarrow V = \mathbf{M}^{-1}U = \mathbf{N}U$$
.

Or
$$\mathbf{M}V = U \Leftrightarrow V = \mathbf{M}^{-1}U = \mathbf{N}U$$
.
 $1/_{6} - 1/_{3} \quad ^{1}/_{6} \quad 0 \quad 0$
On en déduit : $V = \quad ^{1}/_{3} \quad ^{1}/_{3} \quad ^{1}/_{3} \quad (1) = (1)$
 $(-1/_{2} \quad 0 \quad ^{1}/_{2}) \quad ^{2} \quad 1$
Soit W le vecteur des coordonnées de U dans \mathcal{B}_{N} , il est

Soit W le vecteur des coordonnées de U dans \mathcal{B}_N , il est tel que : $\mathbf{N}W = U$.

Or
$$\mathbf{N}W = U \Leftrightarrow W = \mathbf{N}^{-1}U = \mathbf{M}U$$
.
1 1 -1 0 -1
On en déduit: $W = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$
1 1 2 3

3. Montrer que les vecteurs de \mathcal{B}_M sont orthogonaux deux à deux. (1 point)

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Ainsi:

Les trois vecteurs de \mathcal{B}_M sont donc orthogonaux deux à deux.

4. Calculer la norme de chacun des vecteurs de \mathcal{B}_M . (1 point)

$$\|(-2)\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\|(1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\|(1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\|(0)\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

5. En déduire:

a. une base orthonormée de IR3. (0,5 point)

Une base orthonormée est une base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme unitaire. Les vecteurs de \mathcal{B}_M sont orthogonaux deux à deux, mais leur norme n'est pas égale à 1.

Pour obtenir une base orthonormée, on divise chacun des vecteurs de \mathcal{B}_M par sa norme. On en déduit la base orthonormée :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & , \frac{\sqrt{3}}{3} & , & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & (\frac{\sqrt{3}}{3}) & (\frac{\sqrt{2}}{2}) \end{pmatrix}$$

0

b. Les coordonnées du vecteur U = (1) dans cette base. (0,5 point)

Notons V_1 , V_2 et V_3 les trois vecteurs de \mathcal{B}_M respectivement, et W_1 , W_2 et W_3 les trois vecteurs de \mathcal{B} respectivement. On a :

- $W_1 = \frac{V_1}{\sqrt{6}}$ et donc $V_1 = \sqrt{6}\overline{W}_1$
- $W_2 = \frac{V_2}{\sqrt{3}}$ et donc $V_2 = \sqrt{3}W_2$
- $et W_3 = \frac{V_3}{\sqrt{2}}$ et donc : $V_3 = \sqrt{2W_3}$.

On sait (question 2b) que $U = 0V_1 + V_2 + V_3$.

On en déduit que $U = \sqrt{3}W_2 + \sqrt{2}W_3$

Les coordonnées de U dans la base \mathcal{B} sont donc données par le vecteur ($\sqrt{3}$) $\sqrt{2}$

C. Une matrice **P** telle que $P^{-1} = P'$ où P' est la transposée de **P**. (0,5 point)

Les vecteurs d'une base orthonormée forment une matrice orthogonale dont l'inverse est égale à la transposée. On a donc :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 (14 points)

Soit
$$f(\cdot)$$
 l'application linéaire de IR³ dans IR³, définie par $f(X) = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie 1 (2,5 points)

1. Calculer le déterminant de A. (1 point)

Par la méthode des cofacteurs, en développant par rapport à la deuxième ligne et en notant c_{ij} le cofacteur du terme situé ligne i et colonne j

On a donc : Det(A) = -4a + 4

- 2. En déduire :
 - a. la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) 0 est valeur propre de la matrice A. (0,5 point) 0 est une valeur propre de A si $Det(A OI_3) = Det(A) = 0$ ce qui est le cas si a = 1.
 - b. la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) l'application $f(\cdot)$ est injective, surjective, bijective. (1 point) Comme l'application $f(\cdot)$ a le même espace d'arrivée que de départ (on dit que c'est un isomorphisme), elle est injective, surjective et bijective aux mêmes conditions. Il faut pour cela que la matrice soit de plein rang, c'est-à-dire que son déterminant soit non nul. On doit donc avoir $a \neq 1$.

Partie 2 : On suppose que a = 1.

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 1 \\
 A = (2 & 0 & 2) \\
 1 & 2 & 1
 \end{array}$$

1. Le système AX = Y a-t-il une solution quel que soit le vecteur Y de IR^3 (on répondra à cette question sans effectuer aucun calcul) ? (0,5 point)

Pour a = 1, l'application n'est pas sujective. Le système n'admet donc pas toujours une solution. (Il n'en admet une que si Y appartient à Imf)

2. Sans effectuer aucun calcul, peut-on dire si la matrice A est diagonalisable ? (0,5 point)

Pour a = 1, la matrice **A** est symétrique. Elle est donc diagonalisable.

3. Déterminer le rang de A. (1 point)

La matrice est d'ordre 3 et n'est pas de plein rang, d'où rangA < 3.

Or, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, d'où rang $A \ge 2$.

On a donc : rang A = 2.

4. En déduire la dimension de l'ensemble Imf, puis donner une base de Imf. (1 point)

Par définition, $\dim Imf = \operatorname{rang} \mathbf{A}$. On a donc $\dim Imf = 2$.

Une base de Imf est formée de deux vecteurs linéairement indépendants de Imf. Or ceci est le cas des deux

premières colonnes de **A**, qui forment un système libre : $\{(2), (0)\}$.

5. Quelle est la dimension de kerA ? Déterminer une base de kerA. (1 point)

 $\operatorname{Ker} A = \operatorname{ker} f$. Or, d'après le théorème des dimensions, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f$.

D'où : $\dim Kerf = 3 - 2 = 1$.

On pouvait aussi écrire directement :

D'après le théorème des dimensions :

dimkerA = nombre de colonnes de A - rangA,

D'où : dimKerA = 1.

Tout ensemble formé d'un vecteur non nul de kerA est donc une base de kerA.

Pour former une base de ker**A**, il faut donc un vecteur non nul tel que $\mathbf{A}X = \vec{0}_3$.

On peut remarquer que $C_1 + 0C_2 - C_3 = \vec{0}_3$ où C_i est la $i^{ème}$ colonne de **A**. Le vecteur X = (0) appartient donc à -1

ker A. Comme il est non nul, il forme une base, $B_{ker A}$, de ker A:

$$B_{kerA} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

6. Déduire de ce qui précède une valeur propre de **A** . (0,5 point)

Comme dimker $\mathbf{A} = 1$, il existe un vecteur P non nul tel que $\mathbf{A}P = 0P = \vec{0}$. Le réel 0 est donc une valeur propre de \mathbf{A} . Remarque : on retrouve ici le résultat vu partie 1 que si a = 1, 0 est une valeur propre de \mathbf{A} .

- 7. Soit la matrice $\mathbf{B} = \mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3$, où \mathbf{I}_3 est la matrice identité d'ordre 3 :
 - a. Déterminer le rang de **B**. (0,5 point)

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 - 2C_2 + C_3 = \vec{0}_3$ où C_i est la $i^{ème}$ colonne de **B**. On en déduit que rang **B** < 3. Comme les deux premières colonnes de **B** ne sont pas proportionnelles, on peut conclure que rang **B** = 2.

b. En déduire une valeur propre de la matrice **A**. (0,5 point)

Comme la matrice **B** n'est pas de plein rang, on en déduit que son déterminant est nul. Or si $Det(A + 2I_3) = 0$, cela implique que -2 est une valeur propre de **A**.

- 8. Soit l'ensemble $E = \{X \in \mathbb{R}^3 / f(X) = 4X\}$.
 - a. Montrer que *E* est un sous-espace vectoriel de IR³. (1 point)

METHODE 1

E est un sous-espace vectoriel de IR^3 s'il est une partie non vide de IR^3 et s'il est stable pour la somme vectorielle et l'homothétie.

1: E est une partie de IR³ car ses vecteurs sont des vecteurs de IR³.

2 : \vec{E} est non vide car il contient le vecteur nul de IR³ : comme $f(\cdot)$ est une application linéaire de IR³ dans IR³, on a $\vec{f}(0_3) = \vec{0}_3$. D'où : $\vec{f}(0_3) = 4 \times \vec{0}_3$.

3 : Stabilité pour la somme vectorielle. Soient X et X' deux vecteurs de E. Montrons alors que X + X' \in E.

 $X \in E$ et $X' \in E$, on a donc f(X) = 4X et f(X') = 4X'.

On a donc 4X+(4X') = f(X)+f(X')

Ce qui donne 4(X + X') = f(X + X') puisque $f(\cdot)$ est une application linéaire.

On a donc bien : $X + X' \in E$; E est stable pour la somme vectorielle.

4 : Stabilité pour l'homothétie. Soit un vecteur X de E et λ un réel. Montrons que $\lambda X \in E$.

 $X \in E$, on a donc f(X) = 4X.

D'où : $\lambda f(X) = \lambda(4X)$.

Ce qui donne : $f(\lambda X) = 4(\lambda X)$ puisque $f(\cdot)$ est linéaire.

On a donc bien : $\lambda X \in E$; E est stable pour la somme l'homothétie.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de IR 3 .

METHODE 2

De : f(X) = 4X, ou encore, de AX = 4X,

on déduit:

[1]
$$(A - 4I)X = \vec{0}$$

L'ensemble E est donc ker(\mathbf{A} - $\mathbf{4I}$). C'est donc un sous-espace vectoriel de l'espace de départ de l'application linéaire $g(\cdot)$ définie par $g(X) = (\mathbf{A} - \mathbf{4I})X$, qui est IR³ puisque $\mathbf{A} - \mathbf{4I}$ a trois colonnes.

b. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? (0,5 point)

Suite la de méthode 2 de la question prédécente :

Comme:

Rang(**A**-4**I**) = rang(
$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$
 = 2 car
1 2 -3

- la Somme des trois colonnes est égale au vecteur nul;
- les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles

D'où : dimker(\mathbf{A} -4 \mathbf{I}) = nombre de colonnes de (\mathbf{A} -4 \mathbf{I}) - rang(\mathbf{A} -4 \mathbf{I}) = 3 - 2 = 1.

Conclusion : $\dim E = 1$.

c. En déduire une valeur propre de la matrice **A**. (0,5 point)

Comme dimker(\mathbf{A} -4 \mathbf{I}) = 1, il existe un vecteur P non nul tel que (\mathbf{A} -4 \mathbf{I}) $P = \vec{0}$ donc tel que $\mathbf{A}P = 4P$. On en déduit que 4 est une valeur propre de \mathbf{A} .

- 9. Calculer la trace de la matrice **A** et vérifier sur le résultat que vous obtenez est cohérent avec vos résultats précédents. (1 point)
 - $Tr(\mathbf{A}) = 1 + 0 + 1 = 2$ (somme des termes de la diagonale principale de \mathbf{A})
 - Comme **A** est une matrice d'ordre 3, elle a trois valeurs propres. La somme des valeurs propres de **A** est donc 0-2+4=1 (trois valeurs propres déterminées dans les questions précédentes).
 - L'égalité somme des valeurs propres = trace est donc bien vérifiée.
- 10. Montrer que les colonnes de la matrice **M** étudiée dans l'exercice 1 sont des vecteurs propres de **A** en précisant pour chacun d'eux la valeur propre de **A** à laquelle il est associé. (1,5 point)

Le vecteur (-2) est donc un vecteur propre de **A** associé à la valeur propre -2.

Le vecteur (1) est donc un vecteur propre de ${\bf A}$ associé à la valeur propre 4.

Levecteur (0) est donc un vecteur propre de **A** associé à la valeur propre 0.

Les trois colonnes
$$(-2)$$
, (1) et (0) de la matrice M sont donc bien des vecteurs propres de A 1 1 1 1

associés aux valeurs propres – 2, 4 et 0 respectivement.

- 11. En déduire que l'on peut écrire **A** sous la forme : **MDN**, où **M** et **N** sont les matrices de l'exercice 1 est où **D** est une matrice diagonale que l'on précisera. (1 point)
 - La matrice **A** on l'a vu est diagonalisable puisqu'elle est symétrique.
 - On a donc **A** = **MDM** ⁻¹, où **D** est une matrice diagonale des valeurs propres de **A** et où **M** est une matrice de vecteurs propre de **A** correspondante.

41

- On a vu que la matrice **M** de l'exercice 1 était une matrice de vecteur propres de **A**. Comme la matrice **N** de l'exercice 1 est l'inverse de **M**, on a donc : **A** = **MDN**.
- Pour déterminer **D** il faut prendre garde à l'ordre des valeurs propres en cohérence avec l'ordre des vecteurs propres dans **M** :

$$\mathbf{D} = (\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0) \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

12. Peut-on écrire : $\mathbf{A} = \mathbf{PDP'}$ où \mathbf{P} est la matrice définie dans l'exercice 1 et $\mathbf{P'}$ sa transposée ? (0,5 point) Si \mathbf{M} est une matrice de vecteurs propres de \mathbf{A} , alors \mathbf{P} l'est aussi car chacune de ses colonnes est définie proportionnellement à la colonne correspondante dans \mathbf{M} . On a donc bien $\mathbf{A} = \mathbf{PDP^{-1}}$ et comme $\mathbf{P^{-1}} = \mathbf{P'}$ (voir exercice 1), on peut écrire $\mathbf{A} = \mathbf{PDP'}$.

EXERCICE 1 (6 points) – Soient les matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}$$

1. Effectuer le produit **AB**. (0,5 point)

- 2. En déduire :
 - a. Que les colonnes de **A** forment une base \mathcal{B}_A de IR³ et que celles de **B** forment une autre base \mathcal{B}_B de IR³. (1 point) Tout ensemble libre de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 est une base de \mathbb{R}^3 .

Les trois colonnes de **A** (respectivement de **B**) sont bien des vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Comme $AB = I_3$, la matrice B est l'inverse de la matrice A (et réciproquement). On en déduit que A et B sont inversibles et par conséquent qu'elles sont de plein rang.

Les trois colonnes de **A** (respectivement de **B**) sont donc trois vecteurs de \mathbb{R}^3 linéairement indépendants. Elles

forment donc une base de
$$\mathbb{R}^3$$
: avec $\mathcal{B}_A = \{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (-2) & (1) \end{pmatrix}$ et respectivement $\mathcal{B}_B = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 6 & (1/3) & 1/2 \end{pmatrix}$

1

- b. Les coordonnées du vecteur U = (2) dans chacune de ces bases. (1 point)
 - Soit V le vecteur des coordonnées de U dans \mathcal{B}_A , il est tel que : $\mathbf{A}V = U$. Or $\mathbf{A}V = U \Leftrightarrow V = \mathbf{A}^{-1}U = \mathbf{B}U$.

On en déduit :
$$V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1}/2 & -\frac{1}{1}/2 & \frac{1}{1}/2 & (2) = (-\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{1}/3 & \frac{1}{1}/3 & \frac{1}{1}/3 & 0 \\ (3 & 3 & 3) & 1 \end{pmatrix}$$

• Soit W le vecteur des coordonnées de U dans \mathcal{B}_{B_t} il est tel que : $\mathbf{B}W = U$.

Or
$$\mathbf{B}W = U \Leftrightarrow W = \mathbf{B}^{-1}U = \mathbf{A}U$$
.
 $-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$
On en déduit : $W = (0 \quad -2 \quad 1) \quad (2) = (-4)$

3. Montrer que les vecteurs de \mathcal{B}_A sont orthogonaux deux à deux. (1 point)

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Ainsi:

4. Calculer la norme de chacun des vecteurs de \mathcal{B}_A . (1 point)

$$||(0)|| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$||(-2)|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$||(1)|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

- 5. En déduire:
- a. une base orthonormée de IR3. (0,5 point)

Une base orthonormée est une base dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme unitaire. Les vecteurs de \mathcal{B}_A sont orthogonaux deux à deux, mais leur norme n'est pas égale à 1.

Pour obtenir une base orthonormée, on divise chacun des vecteurs de \mathcal{B}_M par sa norme. On en déduit la base orthonormée:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\}$$

b. Les coordonnées du vecteur U = (2) dans cette base. (0,5 point)

Notons V_1 , V_2 et V_3 les trois vecteurs de \mathcal{B}_A respectivement, et W_1 , W_2 et W_3 les trois vecteurs de \mathcal{B}_A respectivement.

- $W_1 = \frac{V_1}{\sqrt{2}}$, et donc $V_1 = \sqrt{2W_1}$
- $W_2 = \frac{V_2}{\sqrt{6}}$, et donc $V_2 = \sqrt{6W_2}$
- et $W_3 = \frac{V_3}{\sqrt{3}}$ et donc : $V_3 = \sqrt{3}\overline{W}_3$.

On sait (question 2b) que $U = -\frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 + V_3$. On en déduit que $U = -\frac{\sqrt{2}}{2}W_1 - \frac{\sqrt{6}}{2}W_2 + \sqrt{3}W_3$

Les coordonnées de U dans la base $\mathcal B$ sont donc données par le vecteur $_{\sqrt{6}}^{-}$

Une matrice C telle que $C^{-1} = C'$ où C' est la transposée de C. (0,5 point)

Les vecteurs d'une base orthonormée forment une matrice orthogonale dont l'inverse est égale à la transposée. On a donc:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 (14 points)

Soit
$$f(\cdot)$$
 l'application linéaire de IR³ dans IR³, définie par $f(X) = \mathbf{M}X$, avec $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Partie 1 (2,5 points)

3. Calculer le déterminant de M. (1 point)

Par la méthode des cofacteurs, en développant par rapport à la première colonne et en notant c_{ij} le cofacteur du terme situé ligne i et colonne j

On a donc: $Det(\mathbf{M}) = 2 - 2a$

- 4. En déduire :
 - a. la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) 0 est valeur propre de la matrice \mathbf{M} . (0,5 point) 0 est une valeur propre de \mathbf{M} si $\mathrm{Det}(\mathbf{M}-0\mathbf{I}_3)=\mathrm{Det}(\mathbf{M})=0$ ce qui est le cas si a=1.
 - b. la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) l'application $f(\cdot)$ est injective, surjective, bijective. (1 point) Comme l'application $f(\cdot)$ a le même espace d'arrivée que de départ (on dit que c'est un isomorphisme), elle est injective, surjective et bijective aux mêmes conditions. Il faut pour cela que la matrice soit de plein rang, c'est-à-dire que son déterminant soit non nul. On doit donc avoir $a \neq 1$.

Partie 2 : On suppose que a = 1.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Le système MX = Y a-t-il une solution quel que soit le vecteur Y de IR^3 (on répondra à cette question sans effectuer aucun calcul) ? (0,5 point)

Pour a = 1, l'application n'est pas sujective. Le système n'admet donc pas toujours une solution. (Il n'en admet une que si Y appartient à Imf)

2. Sans effectuer aucun calcul, peut-on dire si la matrice ${\bf M}$ est diagonalisable ? (0,5 point)

Pour a = 1, la matrice **M** est symétrique. Elle est donc diagonalisable.

3. Déterminer le rang de **M**. (1 point)

La matrice est d'ordre 3 et n'est pas de plein rang, d'où rangM < 3.

Or, les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, d'où rang $M \ge 2$.

On a donc : $rang \mathbf{M} = 2$.

4. En déduire la dimension de l'ensemble Imf, puis donner une base de Imf. (1 point)

Par définition, $\dim Imf = \operatorname{rang} \mathbf{M}$. On a donc $\dim Imf = 2$.

Une base de Imf est formée de deux vecteurs linéairement indépendants de Imf. Or ceci est le cas des deux

premières colonnes de \mathbf{M} , qui forment un système libre : $\{(1)$, (1)}. 0 1

5. Quelle est la dimension de ker**M** ? Déterminer une base de ker**M**. (1 point)

 $\operatorname{Ker} M = \operatorname{ker} f$. Or, d'après le théorème des dimensions, $\operatorname{dim} Ker f = \operatorname{dim} \mathbb{R}^3 - \operatorname{dim} Im f$.

D'où : $\dim Kerf = 3 - 2 = 1$.

On pouvait aussi écrire directement :

D'après le théorème des dimensions :

dimkerM = nombre de colonnes de M - rangM,

D'où : $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{M} = 1$.

Tout ensemble formé d'un vecteur non nul de ker**M** est donc une base de ker**M**.

Pour former une base de ker**M**, il faut donc un vecteur non nul tel que $\mathbf{M}X = \vec{0}_3$.

On peut remarquer que $C_1 - 2C_2 + C_3 = \vec{0}_3$ où C_i est la $i^{\grave{e}me}$ colonne de **M**. Le vecteur X = (-2) appartient donc à

ker**M**. Comme il est non nul, il forme une base, $B_{ker\mathbf{M}}$, de ker**M**:

$$B_{kerM} = \{(-2)\}$$

6. Déduire de ce qui précède une valeur propre de **M** . (0,5 point)

Comme dimker $\mathbf{M} = 1$, il existe un vecteur P non nul tel que $\mathbf{M}P = 0P = \vec{0}$. Le réel 0 est donc une valeur propre de \mathbf{M} . Remarque : on retrouve ici le résultat vu partie 1 question 1 que si a = 1, 0 est une valeur propre de \mathbf{M} .

- 7. Soit la matrice $N = M 2I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3:
 - c. Déterminer le rang de **N**. (0,5 point)

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 + 0C_2 - C_3 = \vec{0}_3$ où C_i est la i^{eme} colonne de **N**. On en déduit que rang **N** < 3. Comme les deux premières colonnes de **N** ne sont pas proportionnelles, on peut conclure que rang **N** = 2.

d. En déduire une valeur propre de la matrice **M**. (0,5 point)

Comme la matrice \mathbf{N} n'est pas de plein rang, on en déduit que son déterminant est nul. Or si $Det(\mathbf{M}-2\mathbf{I_3})=0$, cela implique que 2 est une valeur propre de \mathbf{M} .

- 8. Soit l'ensemble $E = \{X \in \mathbb{R}^3 / f(X) = 3X\}$.
 - d. Montrer que *E* est un sous-espace vectoriel de IR³. (1 point)

METHODE 1

E est un sous-espace vectoriel de IR³ s'il est une partie non vide de IR³ et s'il est stable pour la somme vectorielle et l'homothétie.

1 : *E* est une partie de IR³ car ses vecteurs sont des vecteurs de IR³.

2 : E est non vide car il contient le vecteur nul de IR³ : comme $f(\cdot)$ est une application linéaire de IR³ dans IR³, ona $f(0_3) = \vec{0}_3$. D'où : $f(0_3) = 30_3$.

3 : Stabilité pour la somme vectorielle. Soient X et X' deux vecteurs de E. Montrons alors que X + X' E E.

 $X \in E$ et $X' \in E$, on a donc f(X) = 3X et f(X') = 3X'.

On a donc 3X+(3X') = f(X)+f(X')

Ce qui donne 3(X + X') = f(X + X') puisque $f(\cdot)$ est une application linéaire.

On a donc bien : $X + X' \in E$; E est stable pour la somme vectorielle.

4 : Stabilité pour l'homothétie. Soit un vecteur X de E et λ un réel. Montrons que $\lambda X \in E$.

 $X \in E$, on a donc f(X) = 3X.

D'où : $\lambda f(X) = \lambda(3X)$.

Ce qui donne : $f(\lambda X) = 3(\lambda X)$ puisque $f(\cdot)$ est linéaire.

On a donc bien : $\lambda X \in E$; E est stable pour la somme l'homothétie.

Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de IR 3 .

METHODE 2

De : f(X) = 3X, ou encore, de MX = 3X,

on déduit:

[1]
$$(\mathbf{M} - 3\mathbf{I})X = \vec{0}$$

L'ensemble E est donc ker(\mathbf{M} -3I). C'est donc un sous-espace vectoriel de l'espace de départ de l'application linéaire $g(\cdot)$ définie par $g(X) = (\mathbf{M} - 3\mathbf{I})X$, qui est IR^3 puisque \mathbf{M} -3I a trois colonnes.

e. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ? (0,5 point)

Suite la de méthode 2 de la question prédécente :

Comme:

Rang(M-3I) = rang
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \text{ car}$$

0 1 -1

- la Somme des trois colonnes est égale au vecteur nul.
- Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles

D'où : dimker(\mathbf{M} -3 \mathbf{I}) = nombre de colonnes de (\mathbf{M} -3 \mathbf{I}) - rang(\mathbf{M} -3 \mathbf{I}) = 3 - 2 = 1. Conclusion : dimE = 1.

f. En déduire une valeur propre de la matrice **A**. (0,5 point)

Comme dimker(\mathbf{M} -3 \mathbf{I}) = 1, il existe un vecteur P non nul tel que (\mathbf{M} -3 \mathbf{I}) $P = \vec{0}$ donc tel que $\mathbf{M}P = 3P$. On en déduit que 3 est une valeur propre de \mathbf{M} .

- 9. Calculer la trace de la matrice **M** et vérifier sur le résultat que vous obtenez est cohérent avec vos résultats précédents. (1 point)
 - $Tr(\mathbf{M}) = 2 + 1 + 2 = 5$ (somme des termes de la diagonale principale de \mathbf{M})
 - Comme **M** est une matrice d'ordre 3, elle a trois valeurs propres. La somme des valeurs propres de **M** est donc 0 + 2 + 3 = 5 (trois valeurs propres déterminées dans les questions précédentes).
 - L'égalité somme des valeurs propres = trace est donc bien vérifiée.
- 10. Montrer que les colonnes de la matrice **A** étudiée dans l'exercice 1 sont des vecteurs propres de **M** en précisant pour chacun d'eux la valeur propre de **M** à laquelle il est associé. (1,5 point)

Le vecteur (0) est donc un vecteur propre de \boldsymbol{M} associé à la valeur propre 2.

Le vecteur (-2) est donc un vecteur propre de \mathbf{M} associé à la valeur propre 0. (mais on avait déjà

rencontré ce vecteur plus haut).

Le vecteur (1) est donc un vecteur propre de $\mathbf M$ associé à la valeur propre 3. 1

Les trois colonnes (0), (-2) et (1) de la matrice $\bf A$ sont donc bien des vecteurs propres de $\bf M$ 1 1 1 associés aux valeurs propres 2, 0 et 3 respectivement.

- 11. En déduire que l'on peut écrire **M** sous la forme : **ADB**, où **A** et **B** sont les matrices de l'exercice 1 est où **D** est une matrice diagonale que l'on précisera. (1 point)
 - La matrice **M** on l'a vu est diagonalisable puisqu'elle est symétrique.
 - On a donc **M** = **ADA** 1, où **D** est une matrice diagonale des valeurs propres de **M** et où **A** est une matrice de vecteurs propre de **M** correspondante.

- On a vu que la matrice **A** de l'exercice 1 était une matrice de vecteur propres de **M**. Comme la matrice **B** de l'exercice 1 est l'inverse de **A**, on a donc : **M** = **ADB**.
- Pour déterminer **D** il faut prendre garde à l'ordre des valeurs propres en cohérence avec l'ordre des vecteurs propres dans **A** :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Peut-on écrire : **M** = **CDC**′ où **C** est la matrice définie dans l'exercice 1 et **C**′ sa transposée ? (0,5 point)

Si **A** est une matrice de vecteurs propres de **M**, alors **C** l'est aussi car chacune de ses colonnes est définie proportionnellement à la colonne correspondante dans **A**. On a donc bien $\mathbf{M} = \mathbf{CDC^{-1}}$ et comme $\mathbf{C^{-1}} = \mathbf{C'}$ (voir exercice 1), on peut écrire $\mathbf{M} = \mathbf{CDC'}$.

UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE

Licence de Sciences Economiques – deuxième année

Examen du 13 janvier 2017 – 15h-17h

SUJET 1

Eléments de correction

Exercice 1

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$
.

I. Etude de l'application linéaire \dagger (.) définie par \dagger (X) = AX. (4 points)

1. Déterminer la (les) solution(s) du système $AX = \vec{0}_3$. (1 point)

On applique la méthode du pivot à la matrice élargie du système $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$, de $2 \quad 3 \quad 0 \quad x_3$

façon à diagonaliser la matrice **A** des coefficients dans la matrice élargie $(A|\vec{0}_3)$:

On revient à l'écriture sous forme de système :

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$
 $x_1 = 0$
 $\{ 2x_2 + x_3 = 0 \Longrightarrow \{x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 x_3 = 0 \}$

Le système $AX = \vec{0}_3$ admet une solution unique $X = \vec{0}_3$.

2. En déduire le rang de l'application linéaire f(.). (0,5 point)

Rangf = rang \mathbf{A} .

Le rang d'une matrice est égal au nombre maximum de colonnes (ou de lignes) linéairement indépendantes que cette matrice comporte.

Les trois colonnes de A sont linéairement indépendantes puisque l'unique solution du système $AX = \vec{0}_3$ est $\vec{0}_3$. On en déduit que rang f = rang A = 3.

- 3. Définir l'image d'une application linéaire. Quelle est l'image de $f(\cdot)$? (1 point) L'image d'une application linéaire $f(\cdot)$ est l'ensemble des images par $f(\cdot)$ des vecteurs de son ensemble de départ (ou l'ensemble des vecteurs de l'ensemble d'arrivée qui ont au moins un antécédent par $f(\cdot)$). C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée (ici \mathbb{R}^3). Ici, diNINf = rangf = 3 et diN \mathbb{R}^3 = 3 : on en déduit que INf est l'ensemble d'arrivée \mathbb{R}^3 tout entier. IN $\mathbf{f} = \mathbb{R}^3$.
- 4. Définir le noyau d'une application linéaire. Ouel est le noyau de $f(\cdot)$? (1 point) Le noyau d'une application linéaire f(·) est l'ensemble des vecteurs de l'ensemble de départ qui ont pour image par $f(\cdot)$ le vecteur nul. C'est donc l'ensemble des vecteurs X vérifiant le système $AX = \vec{0}_3$. D'où : $Ker \mathbf{f} = {\vec{0}_3}$ (voir réponse à la question 1.).
- 5. L'application $f(\cdot)$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? (0.5 point)rangf = dim(enseNble de départ) = dim(enseNble d^uarrivée).On en déduit que $f(\cdot)$ est injective, surjective et bijective.

II. Diagonalisation de la matrice A (6 points)

On notera λ_1 , λ_2 et λ_3 ses trois valeurs propres.

notera
$$\lambda_1$$
, λ_2 et λ_3 ses trois valeurs propres.

1. Déterminer le rang de la matrice $(A + I)$. $(0,5 \, point)$

$$2 \quad 3 \quad 1$$

$$\operatorname{rang}(A + I) = \operatorname{rang}(-2 \quad -3 \quad -1) = 1$$
Tales trois colonnes de la matrice $(A + I)$ sont proportionnelles et la m

Car les trois colonnes de la matrice (A + I) sont proportionnelles et la matrice est non nulle.

2. En déduire la dimension de ker(A + I). (0,5 point)

Selon de théorème des dimensions, quelle que soit la matrice carrée **M**, on a :

rang**M** + dimker**M** = nombre de colonnes de **M**.

En posant M = A + I, on a donc:

$$\dim \operatorname{Ker}(A + I) = \operatorname{noNbre} \operatorname{de} \operatorname{colonnes} \operatorname{de} (A + I) - \operatorname{rang}(A + I) = 2$$

3. Déterminer une base de ker(A + I). (1 point)

Pour former une base de Ker(A + I) il faut deux vecteurs libres de Ker(A + I).

Par exemple, les vecteurs (0) et (1) ne sont pas proportionnels et vérifient :

Une base de Kerf est donc
$$\mathcal{B}_{\text{Kerf}} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \}$$

4. Quel est le lien entre la dimension du sous-espace propre $E_{\mathbb{R}}$ associé à la valeur propre h et l'ordre de multiplicité de h ? (0,5 point)

$$diNE_{\delta} = diNKer(A - hI) \leq ordre de multiplicité de h$$

- 5. En déduire les valeurs de λ_1 et de λ_2 . (0,5 point)
- Comme (A + I) est singulière, $D\acute{e}t(A + I) = 0$ et -1 est une valeur propre de A.
- Comme DiNE₋₁=2, la multiplicité algébrique de $\lambda = -1$ est au moins égal à 2.

On en déduit que l'on peut définir $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -1$.

6. Calculer le déterminant de A en utilisant la méthode de Sarrus. (1 point)

7. En déduire la valeur de λ_3 . (0,5 point)

Par propriété (le produit des valeurs propres d'une matrice est égal au déterminant de cette matrice), on a : $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = \text{Dét}(A)$. D'où : $\lambda_3 = \frac{-1}{(h_1 \times h_2)} = -1$.

8. Vos résultats sont-ils compatibles avec la trace de A ? (0,5 point)

Par propriété (la somme des valeurs propres d'une matrice est égal à la trace de cette matrice), on a : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(A)$. Ici : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -3$.

Or Tr(A) = 1 - 4 + 0 = -3 (puisque la trace d'une matrice carrée est égale au produit de ses termes diagonaux).

Les résultats sont donc cohérents

9. La matrice A est-elle diagonalisable ? (1 point)

La matrice A n'est pas diagonalisable car elle admet une valeur propre triple dont le sous-espace propre est de dimension 2 seulement. On ne peut pas trouver une matrice de vecteurs propres régulière (et donc inversible).

III. Matrice représentative de $\dagger(\cdot)$ dans une autre base (5 points)

On considère le système
$$S = \{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de B en utilisant une autre méthode que celle de Sarrus. (0,5 point) Méthode des cofacteurs en développant par rapport à la colonne 3 :

Dét(B) =
$$b_{33}c_{33} = -1 \times (-1)^{3+3} \times \text{Dét} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \times 1 = -1$$

2. Démontrer que S est une base de \mathbb{R}^3 . (1 point)

Une base de \mathbb{R}^3 est formée de 3 vecteurs libres de \mathbb{R}^3

- Les trois vecteurs de S sont des vecteurs de \mathbb{R}^3
- $D\acute{e}t(B) \neq 0 \Longrightarrow B$ est régulière \Longrightarrow les colonnes de B (qui sont les vecteurs de S) sont linéairement indépendantes.

Le système S est donc une base de \mathbb{R}^3 .

3. Déterminer la matrice M de f(.) par rapport à la base S. (1,5 point)

Notons $M = (C_1 \quad C_2 \quad C_3)$ où C_i donne les coordonnées, dans la base S, de l'image par $f(\cdot)$ du jème vecteur de S.

•
$$f(1) = (-2 - 4 - 1)(1) = (-1) = -1 \times (1) \Rightarrow C_1 = (0)$$

• $f(1) = (-2 - 4 - 1)(1) = (-1) = -1 \times (1) \Rightarrow C_1 = (0)$
• $f(1) = (-2 - 4 - 1)(1) = (-1) = -1 \times (1) \Rightarrow C_2 = (-1)$
• $f(1) = (-2 - 4 - 1)(1) = (-1) = -1 \times (1) \Rightarrow C_2 = (-1)$

•
$$f(1) = (-2 \ -4 \ -1)(1) = (-1) = -1 \times (1) \Longrightarrow C_2 = (-1)$$

-1 2 3 0 -1 1 -1 0

On a donc M =
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & (-1 & 0 & 0) & = & (0 & 1 & 0) \\ -3 & -1 & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $C = B^{-1}$

5. Comment déterminer la matrice M à partir des matrices A, **B** et **C** ? (1 point)

$$M = B^{-1}AB = CAB$$

Exercice 2 (5 points)

Soit le vecteur
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
.

1. Déterminer l'ensemble E_1 des vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à V_1 . (1 point)

Les vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à V_1 sont les vecteurs $X = (X_2)$ tels que $X * V_1 = X_1 V_1 = 0$, c'est-à-

dire les vecteurs tels que
$$x_1+x_2=0 \Rightarrow x_2=-x_1$$
.
 x_1 x_2 x_3 x_4 x_4 x_5 x_5 x_6 x_7 x_8 x_8

On en déduit que E_1 est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $\{(-1)$, $(0)\}$

2. Vérifier que
$$V_2 = (-1) \in E_1$$
. (0,5 point)

$$1$$

$$V_1 * V_2 = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 = 0$$
. Donc $V_2 \in E_1$.

3. Déterminer un vecteur V3 de E1 orthogonal à V2. (1 point)

$$V_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} V_3 \in E_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ V_3 \perp V_2 \Leftrightarrow V_3 * V_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

 $V_3 \text{ v\'erifie donc le syst\`eme} \begin{cases} x_1+x_2=0\\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ Ce qui donne : $\begin{cases} x_1=-x_2\\ x_3=x_2-x_1=2x_2 \end{cases}$

Ce qui donne :
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \\ x_3 = x_2 - x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

Par exemple, pour $x_2=-1$, on a $x_1=1$ et $x_3=-2$ ce qui donne : 1

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ -2$$

4. Calculer les normes des vecteurs V₁, V₂ et V₃. (1,5 point)

•
$$||V_1|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

•
$$\|V_2\| = \int \overline{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

•
$$||V_3|| = \int 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = \sqrt{6}$$

5. Déduire du système $\{V_1, V_2, V_3\}$ une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . (1 point)

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{f} \frac{\sqrt{2}}{2 \, \mathbf{h}} \, \mathbf{1}}{\mathbf{1} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{3}}{3 \, \mathbf{h}} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{6} \, \mathbf{h}}{6 \, \mathbf{h}} \, \mathbf{h}}{\mathbf{1} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{6} \, \mathbf{h}}{6 \, \mathbf{h}} \, \mathbf{h}}{\mathbf{1} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{6} \, \mathbf{h}}{6 \, \mathbf{h}} \, \mathbf{h}}{\mathbf{1} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{3}}{3 \, \mathbf{1}} \, \mathbf{1}} - \frac{\sqrt{6} \, \mathbf{h}}{6 \, \mathbf{h}} \, \mathbf{h}}{\mathbf{1} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{3}}{3 \, \mathbf{1}} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{6} \, \mathbf{h}}{6 \, \mathbf{h}} \, \mathbf{h}}{\mathbf{1} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{3}}{3 \, \mathbf{1}} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{6} \, \mathbf{h}}{6 \, \mathbf{h}} \, \mathbf{h}}{\mathbf{1} \, \mathbf{1}} \frac{\sqrt{6} \, \mathbf{h}}{6 \, \mathbf{h}} \, \mathbf{h}}$$

UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE

Licence de Sciences Economiques – deuxième année

Examen du 13 janvier 2017 – 15h-17h

SUJET 2

Eléments de correction

Exercice 1

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$
.
 $2 & 3 & -2$

I. Etude de l'application linéaire $\dagger(\cdot)$, de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , définie par $\dagger(X) = AX$. (4 points)

1. Déterminer la (les) solution(s) du système $AX = \vec{0}_3$. (1 point)

On applique la méthode du pivot à la matrice élargie du système $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & x_1 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ 2 & 3 & -2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$

façon à diagonaliser la matrice des coefficients dans la matrice élargie ($A|\vec{0}_3$):

On revient à l'écriture sous forme de système :

Le système $AX = \vec{0}_3$ admet une solution unique $X = \vec{0}_3$.

2. En déduire le rang de l'application linéaire $f(\cdot)$. (0,5 point)

Rangf = rangA.

Le rang d'une matrice est égal au nombre maximum de colonnes (ou de lignes) linéairement indépendantes que cette matrice comporte.

Les 3 colonnes de A sont linéairement indépendantes puisque l'unique solution du système $AX = \vec{0}_3$ est $\vec{0}_3$. On en déduit que rangf = rangA = 3.

- 3. Définir l'image d'une application linéaire. Quelle est l'image de $f(\cdot)$? (1 point) L'image d'une application linéaire $f(\cdot)$ est l'ensemble des images par $f(\cdot)$ des vecteurs de son ensemble de départ (ou l'ensemble des vecteurs de l'ensemble d'arrivée qui ont au moins un antécédent par $f(\cdot)$). C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée (ici \mathbb{R}^3). Ici, dinInf = rangf = 3 et $din\mathbb{R}^3 = 3$: on en déduit que Inf est l'ensemble d'arrivée \mathbb{R}^3 tout entier. $Inf = \mathbb{R}^3$.
- 4. Définir le noyau d'une application linéaire. Quel est le noyau de $f(\cdot)$? (1 point) Le noyau d'une application linéaire $f(\cdot)$ est l'ensemble des vecteurs de l'ensemble de départ qui ont pour image par $f(\cdot)$ le vecteur nul. C'est donc l'ensemble des vecteurs X vérifiant le système $AX = \vec{0}_3$. D'où : $Ker f = \{\vec{0}_3\}$ (voir réponse à la question 1.).
- 5. L'application $f(\cdot)$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? $(0.5 \, point)$ rang f = dim(enseNble de départ) = dim(enseNble d¹arrivée). On en déduit que $f(\cdot)$ est injective, surjective et bijective.

II. Diagonalisation de la matrice A (6 points)

On notera λ_1 , λ_2 et λ_3 les trois valeurs propres de la matrice **A**.

1. Déterminer le rang de la matrice (A + 3I). (0,5 point)

rang(A + 3I) = rang
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

2 3 1

Car les trois colonnes de la matrice (A + 3I) sont proportionnelles et la matrice est non nulle.

2. En déduire la dimension de ker(A + 3I). (0,5 point)

Selon de théorème des dimensions, quelle que soit la matrice carrée **M**, on a :

rang**M** + dimker**M** = nombre de colonnes de **M**.

En posant $\mathbf{M} = A + 3 I$, on a donc:

$$dimKer(A + 3I) = noNbre de colonnes de (A + 3I) - rang(A + 3I) = 3 - 1 = 2$$

3. Déterminer une base de ker(A + 3I). (1 point)

Pour former une base de Ker(A + 3I) il faut (et il suffit) deux vecteurs libres de Ker(A + 3I).

Par exemple, (0) et (1) puisque:

Une base de Kerf est donc
$$\mathcal{B}_{\text{Kerf}} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

4. Quel est le lien entre la dimension du sous-espace propre $E_{\mathbb{R}}$ associé à la valeur propre λ et la multiplicité algébrique de λ ? (0,5 point)

$$diNE_{\delta} = dim Ker(A - hI) \le multiplicité algébrique de h$$

- 5. En déduire les valeurs de λ_1 et de λ_2 . (0,5 point)
- Comme (A + 3I) est singulière, $D\acute{e}t(A + 3I) = 0$ et -3 est une valeur propre de A.
- Comme DinE₋₃=2, l'ordre de multiplicité de h = -3 est au moins égal à 2.

On en déduit que l'on peut définir $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -3$.

6. Calculer le déterminant de A en utilisant la méthode de Sarrus. (1 point)

Dét
$$(-2 \quad -6 \quad -1) = (-1) \times (-6) \times (-2) + 3 \times (-1) \times 2 + 1 \times (-2) \times 3$$

 $2 \quad 3 \quad -2$
 $-1 \times (-6) \times 2 - (-1) \times (-1) \times 3 - 3 \times (-2) \times (-2)$
 $= -12 - 6 - 6 + 12 - 3 - 12 = -27$

7. En déduire la valeur de λ_3 . (0,5 point)

Par propriété (le produit des valeurs propres d'une matrice est égal au déterminant de cette matrice), on a : $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = \text{Dét}(A)$. D'où : $\lambda_3 = \frac{-27}{(h_1 \times h_2)} = -3$

8. Vos résultats sont-ils compatibles avec la trace de A ? (0,5 point)

Par propriété (la somme des valeurs propres d'une matrice est égal à la trace de cette matrice), on a : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(A)$.

Or Tr(A) = -1 - 6 - 2 = -9 (puisque la trace d'une matrice carrée est égale au produit de ses termes diagonaux).

D'où
$$\lambda_3 = -9 + 3 + 3 = -3$$
.

Les résultats sont cohérents

9. La matrice A est-elle diagonalisable ? (1 point)

La matrice A n'est pas diagonalisable car elle admet une valeur propre triple dont le sous-espace propre est de dimension 2 seulement. On ne peut pas trouver une matrice de vecteurs propres régulière (et donc inversible).

III. Matrice représentative de $\dagger(\cdot)$ par rapport à une autre base (5 points)

-1On considère le système S = $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ et la matrice D = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de D en utilisant une autre méthode que celle de Sarrus. (0,5 point) Méthode des cofacteurs en développant par rapport à la colonne 3 :

$$D\acute{e}t(D) = d_{33}c_{33} = -1 \times (-1)^{3+3} \times D\acute{e}t(\frac{1-1}{0}) = -1 \times 1 = -1$$

2. Démontrer que S est une base de \mathbb{R}^3 . (1 point)

Une base de \mathbb{R}^3 est formée de trois vecteurs libres de \mathbb{R}^3

- Les trois vecteurs de S sont des vecteurs de \mathbb{R}^3
- $D\acute{e}t(D) \neq 0 \Longrightarrow D$ est régulière \Longrightarrow les colonnes de D (qui sont les vecteurs de S) sont linéairement indépendantes

Le système S est donc une base de \mathbb{R}^3

3. Déterminer la matrice B représentant f(.) par rapport à la base S. (1,5 point)

Notons B = $(C_1 C_2 C_3)$ où C_i donne les coordonnées, dans la base S, de l'image par $f(\cdot)$ du jème vecteur de S.

•
$$f(1) = (-2 \ -6 \ -1)(1) = (-3) = -3 \times (1) \Rightarrow C_2 = (-3)$$

-1 2 3 -2 -1 3 -1 0

•
$$f(0) = (-2 \ -6 \ -1)(0) = (1) = 1 \times (1) -3(0) \Rightarrow C_3 = (1)$$

-1 2 3 -2 -1 2 -1 -1 -3

On a donc B =
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Effectuer le produit DM, où M =
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
. Qu'en déduisez-vous ? (1 point) $-2 & -3 & -1$

On en déduit que $M = D^{-1}$

5. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A, **D** et **M** ? (1 point)

$$B = D^{-1}AD = MAD$$

Exercice 2 (5 points)

Soit le vecteur $V_1 = (2)$.

1. Déterminer l'ensemble E_1 des vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à V_1 . (1 point)

Les vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à V_1 sont les vecteurs $X = (X_2)$ tels que $X * V_1 = X^u V_1 = 0$, c'est-à-

dire les vecteurs tels que $-x_1 + 2x_2 = 0$, à savoir tels que : $x_1 = 2x_2$.

$$X \in E_1 \iff X = (x_2) = x_2(1) + x_3(0)$$

 $x_3 \qquad 0 \qquad 1$

On en déduit que
$$E_1$$
 est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $\{(1)$, $(0)\}$ 0 1

2. Vérifier que
$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ (0) \in E_1. (0,5 point) \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$V_1 * V_2 = (-1) \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 2 = 0$$
. donc $V_2 \in E_1$

3. Déterminer un vecteur V₃ de E₁ orthogonal à V₂. (1 point)

$$\begin{array}{c} x_1 \\ V_3 = (x_2) \\ x_3 \end{array} \text{ tel que } \{ \begin{matrix} V_3 \in E_1 \Leftrightarrow -x_1 + 2x_2 = 0 \\ V_3 \perp V_2 \Leftrightarrow V_3 * V_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_3 = 0 \end{matrix} \\ V_3 \text{ v\'erifie donc le syst\`eme } \{ \begin{matrix} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$V_3$$
 vérifie donc le système $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$

Ce qui donne :
$$x_1 = 2x_2$$

 $x_3 = 0$

Par exemple, pour $x_2 = 1$, on a $x_1 = 2$ et $x_3 = 0$, ce qui donne :

$$V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Calculer les normes des vecteurs V₁, V₂ et V₃. (1,5 point)

$$||V_1|| = f(-1)^2 + 2^2 + 0^2 = \sqrt{5}$$

$$||V_2|| = f(0^2 + 0^2 + 2^2) = \sqrt{4} = 2$$

$$||V_3|| = f(2^2 + 1^2 + 0^2) = \sqrt{5}$$

5. Déduire du système $\{V_1,V_2,V_3\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3.$ (1 point)

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{f}}{|\mathbf{1}|} - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} |\mathbf{1}|$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{5}}{5} |\mathbf{1}| + \frac{\sqrt{5}}{5} |\mathbf{1}|$$

$$\mathcal{L} = \mathbf{1} |\mathbf{1}|$$

UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE

Licence de Sciences Economiques – deuxième année

Examen du 13 janvier 2017 – 15h-17h

SUJET 3

Eléments de correction

Exercice 1

Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
.

I. Etude de l'application linéaire $\uparrow(\cdot)$, de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , définie par $\uparrow(X) = MX$. (4 points)

1. Déterminer la (les) solution(s) du système $MX = \vec{0}_3$. (1 point)

On applique la méthode du pivot à la matrice élargie du système
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & x_1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$
 façon $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$

à diagonaliser la matrice **M** des coefficients dans la matrice élargie ($M|\vec{0}_3$):

On revient à l'écriture sous forme de système :

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \quad x_1 = 0$$

 $\{ 3x_2 + 4x_3 = 0 \Longrightarrow \{x_2 = 0 -x_3 = 0 \ x_3 = 0 \}$

Le système $MX = \vec{0}_3$ admet une solution unique $X = \vec{0}_3$.

2. En déduire le rang de l'application linéaire $f(\cdot)$. (0,5 point)

Rangf = rang \mathbf{M} .

Le rang d'une matrice est égal au nombre maximum de colonnes (ou de lignes) linéairement indépendantes que cette matrice comporte.

Les trois colonnes de M sont linéairement indépendantes puisque l'unique solution du système $MX = \vec{0}_3$ est $\vec{0}_3$. On en déduit que rangf = rangM = 3.

- 3. Définir l'image d'une application linéaire. Quelle est l'image de $f(\cdot)$? (1 point) L'image d'une application linéaire $f(\cdot)$ est l'ensemble des images par $f(\cdot)$ des vecteurs de son ensemble de départ (ou l'ensemble des vecteurs de l'ensemble d'arrivée qui ont au moins un antécédent par $f(\cdot)$). C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée (ici \mathbb{R}^3). Ici, dinInf = rangf = 3 et $din\mathbb{R}^3 = 3$: on en déduit que Inf est l'ensemble d'arrivée \mathbb{R}^3 tout entier. $Inf = \mathbb{R}^3$.
- 4. Définir le noyau d'une application linéaire. Quel est le noyau de $f(\cdot)$? (1 point) Le noyau d'une application linéaire $f(\cdot)$ est l'ensemble des vecteurs de l'ensemble de départ qui ont pour image par $f(\cdot)$ le vecteur nul. C'est donc l'ensemble des vecteurs X vérifiant le système $MX = \vec{0}_3$. D'où : $Ker f = \{\vec{0}_3\}$ (voir réponse à la question 1.).
- 5. L'application $f(\cdot)$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? $(0.5\ point)$ rang $f = \dim(\text{enseNble de départ}) = \dim(\text{enseNble d}^u \text{arrivée})$. On en déduit que $f(\cdot)$ est injective, surjective et bijective.

II. Diagonalisation de la matrice M (6 points)

On notera λ_1 , λ_2 et λ_3 les trois valeurs propres de la matrice **M**.

1. Déterminer le rang de la matrice (M - I). (0.5 point)

rang(M - I) = rang
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

Car les trois colonnes de la matrice (M - I) sont proportionnelles et la matrice est non nulle.

2. En déduire la dimension de ker(M - I). (0,5 point)

Selon de théorème des dimensions, quelle que soit la matrice carrée A, on a :

En posant A = M - I, on a donc:

$$dimKer(M - I) = noNbre de colonnes de (M - I) - rang(M - I) = 2$$

3. Déterminer une base de ker(M - I). (1 point)

Pour former une base de Ker(M - I) il faut deux vecteurs libres de Ker(M - I).

en forment même une base :
$$\mathcal{B}_{\text{Ker}(M-I)} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \}$$

4. Quel est le lien entre la dimension du sous-espace propre E_R associé à la valeur propre λ et la multiplicité algébrique de λ ? (0,5 point)

$$diNE_{B} = diNKer(M - hI) \le multiplicité algébrique de \lambda$$

- 5. En déduire les valeurs de λ_1 et de λ_2 . (0,5 point)
- Comme (M I) est singulière, $D\acute{e}t(M I) = 0$ et 1 est une valeur propre de M.
- Comme DinE₁ = 2, la multiplicité algébrique de λ = 1 est au moins égal à 2.

On en déduit que l'on peut définir $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1$.

6. Calculer la trace de **M**. En déduire la valeur de λ_3 . (0,5 point)

$$Tr(M) = 3 - 2 + 2 = 3$$

Par propriété, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = Tr(M)$, d'où $\lambda_3 = 3 - 1 - 1 = 1$.

7. Vos résultats sont-ils compatibles avec le déterminant de M (que vous calculerez <u>en utilisant</u> la méthode de Sarrus) ? (1,5 point)

Calcul du déterminant :

Conclusion:

Par propriété (le produit des valeurs propres d'une matrice est égal au déterminant de cette matrice), on a : Dét(M) = $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3$. D'où (ici) : Dét(M) = $1 \times 1 \times 1 = 1$: résultat cohérent

8. La matrice M est-elle diagonalisable ? (1 point)

La matrice M n'est pas diagonalisable car elle admet une valeur propre triple dont le sous-espace propre est de dimension 2 seulement. On ne peut pas trouver une matrice de vecteurs propres régulière (et donc inversible).

III. Matrice représentative de $\dagger(\cdot)$ par rapport à une autre base (5 points)

1. Calculer le déterminant de B en utilisant une autre méthode que celle de Sarrus. (0,5 point) Méthode des cofacteurs en développant par rapport à la ligne 1 :

58

$$D\acute{e}t(B) = b_{12}c_{12} = 1 \times (-1)^{1+2} \times D\acute{e}t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) \times 1 = -1$$

2. Démontrer que S est une base de \mathbb{R}^3 . (1 point)

Une base de \mathbb{R}^3 est formée de trois vecteurs libres de \mathbb{R}^3

- Les trois vecteurs de S sont des vecteurs de \mathbb{R}^3
- $D\acute{e}t(B) \neq 0 \Longrightarrow B$ est régulière \Longrightarrow les colonnes de B (qui sont les vecteurs de S) sont linéairement indépendantes

Le système S est donc une base de \mathbb{R}^3

3. Déterminer la matrice A représentant f(.) par rapport à la base S. (1,5 point)

Notons A = $(C_1 \quad C_2 \quad C_3)$ où C_i donne les coordonnées, dans la base S, de l'image par $f(\cdot)$ du ième vecteur de S.

•
$$f(0) = (-2 \quad -2 \quad -1)(0) = (-1) = 1 \times (-1) + 1(0) \Longrightarrow C_3 = (1)$$

1 2 3 2 1 2 1 1

4. Effectuer le produit BD, où D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduisez-vous ? (1 point)

BD =
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & (1 & 0 & 0) = (0 & 1 & 0) & D'où D = B-1.$$

5. Exprimer la matrice M en fonction des matrices A, **B** et **D** ? (1 point)

$$M = BAB^{-1} = BAD.$$

Exercice 2 (5 points)

Soit le vecteur $V_1 = (0)$.

1. Déterminer l'ensemble E_1 des vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à V_1 . (1 point)

Les vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à V_1 sont les vecteurs $X = (X_2)$ tels que $X * V_1 = X_1 V_1 = 0$, c'est-à-

dire les vecteurs tels que $x_1 - x_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = x_1$.

$$X \in E_1 \iff X = (x_2) = x_1 (0) + x_2 (1)$$

 x_1 1 0

On en déduit que E_1 est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $\{(0)$, $(1)\}$

2. Vérifier que
$$V_2 = (-1) \in E_1$$
. (0,5 point)

$$V_2 * V_1 = 1 \times 1 - 1 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$$
. Donc $V_2 \in E_1$

3. Déterminer un vecteur V_3 de E_1 orthogonal à V_2 . (1 point)

$$V_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} V_3 \in E_1 \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0 \\ V_3 \perp V_2 \Leftrightarrow V_3 * V_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

 $V_{3} \text{ v\'erifie donc le syst\`eme } \begin{cases} x_{1}-x_{3}=0 \\ x_{1}-x_{2}+x_{3}=0 \end{cases}$ Ce qui donne : $\begin{cases} x_{3}=x_{1} \\ x_{2}=x_{1}+x_{3}=2x_{1} \end{cases}$

Ce qui donne :
$$\begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = x_1 + x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

Par exemple, pour $x_3 = 1$, on a $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, ce qui donne :

$$V_3 = (2)$$

4. Calculer les normes des vecteurs V₁, V₂ et V₃. (1,5 point)

•
$$\|V_1\| = \int \overline{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

•
$$\|V_2\| = \int 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = \sqrt{3}$$

• $\|V_3\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

•
$$||V_3|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

5. Déduire du système $\{V_1, V_2, V_3\}$ une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . (1 point)

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} & \sqrt{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \mathbf{h} \\ \mathbf{i} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \mathbf{h} \\ \mathbf{i} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE

Licence de Sciences Economiques – deuxième année

Examen du 13 janvier 2017 – 15h-17h

SUJET 4

Indiquez votre numéro de TD sur votre copie

Exercice 1

Soit la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
.

I. Etude de l'application linéaire $\uparrow(\cdot)$, de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , définie par $\uparrow(X) = BX$. (4 points)

1. Déterminer la (les) solution(s) du système $BX = \vec{0}_3$. (1 point)

On applique la méthode du pivot à la matrice élargie du système $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & x_1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ façon $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$

à diagonaliser la matrice **B** des coefficients dans la matrice élargie ($B|\vec{0}_3$):

On revient à l'écriture sous forme de système :

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 x_1 = 0$$

$$\{ 4x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow \{x_2 = 0 \\ 8x_3 = 0 x_3 = 0$$

Le système BX = $\vec{0}_3$ admet une solution unique X = $\vec{0}_3$.

2. En déduire le rang de l'application linéaire $f(\cdot)$. (0,5 point)

Rangf = rang \mathbf{B} .

Le rang d'une matrice est égal au nombre maximum de colonnes (ou de lignes) linéairement indépendantes que cette matrice comporte.

Les trois colonnes de B sont linéairement indépendantes puisque l'unique solution du système $BX = \vec{0}_3$ est $\vec{0}_3$. On en déduit que rangf = rangB = 3.

3. Définir l'image d'une application linéaire. Quelle est l'image de $f(\cdot)$? (1 point) L'image d'une application linéaire $f(\cdot)$ est l'ensemble des images par $f(\cdot)$ des vecteurs de son ensemble de départ (ou l'ensemble des vecteurs de l'ensemble d'arrivée qui ont au moins un antécédent par $f(\cdot)$). C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée (ici \mathbb{R}^3). Ici, dinInf = rangf = 3 et $din\mathbb{R}^3 = 3$: on en déduit que Inf est l'ensemble d'arrivée \mathbb{R}^3 tout entier. $Inf = \mathbb{R}^3$.

4. Définir le noyau d'une application linéaire. Quelle est le noyau de $f(\cdot)$? (1 point) Le noyau d'une application linéaire $f(\cdot)$ est l'ensemble des vecteurs de l'ensemble de départ qui ont pour image par $f(\cdot)$ le vecteur nul. C'est donc l'ensemble des vecteurs X vérifiant le système $BX = \vec{0}_3$. D'où : $Ker f = \{\vec{0}_3\}$ (voir réponse à la question 1.).

5. L'application
$$f(\cdot)$$
 est-elle injective ? surjective ? bijective ? $(0.5 \ point)$ rang $f = \dim(\text{enseNble de départ}) = \dim(\text{enseNble d}^{\text{u}}\text{arrivée})$. On en déduit que $f(\cdot)$ est injective, surjective et bijective.

II. Diagonalisation de la matrice B (6 points)

On notera λ_1 , λ_2 et λ_3 les trois valeurs propres de la matrice **B**.

1. Déterminer le rang de la matrice (B - 2I). (0,5 point) 2 3

rang(B - 2 I) = rang
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

2 3 1

Car les trois colonnes de la matrice (B - 2I) sont proportionnelles et la matrice est non nulle.

2. En déduire la dimension de ker(B - 2I). (0,5 point)

Selon de théorème des dimensions, quelle que soit la matrice carrée A, on a :

En posant A = (B - 2 I), on a donc:

$$\dim \text{Ker}(B-2I) = \text{noNbre de colonnes de } (B-2I) - \text{rang}(B-2I) = 2$$

3. Déterminer une base de ker(B - 2I). (1 point)

Pour former une base de Ker(B - 2 I) il faut deux vecteurs libres de Ker(B - 2 I).

Par exemple, comme:

Par exemple, comme:

2 3 1 1 0 -1 3 1 0 0

(-2 -3 -1) (0) = (0) et (1 -3 -1) (1) = (0),

2 3 1 -2 0 -1 3 1 -3 0

Leave steams (0) et (1) expertisement
$$\lambda$$
 $Ker(R, 2, 1)$. Et sem

les vecteurs (0) et (1) appartiennent à Ker(B - 2 I). Et comme ils ne sont pas proportionnels, -2 -3

ils en forment même une base : $\mathcal{B}_{\text{Ker}(M-I)} = \{($ 0),(1)}.

4. Quel est le lien entre la dimension du sous-espace propre $E_{\mathbb{S}}$ associé à la valeur propre λ et la multiplicité algébrique de λ? (0,5 point)

 $diNE_{\delta} = diNKer(B - hI) \le multiplicité algébrique de h$

- 5. En déduire les valeurs de λ_1 et de λ_2 . (0,5 point)
- Comme (B 2 I) est singulière, $D\acute{e}t(B 2 I) = 0$ et 2 est une valeur propre de B.
- Comme DinE₂ = 2, la multiplicité algébrique de λ = 2 est au moins égal à 2.

On en déduit que l'on peut définir $h_1 = 2$ et $h_2 = 2$.

6. Calculer la trace de **B**. En déduire la valeur de λ_3 . (0,5 point)

$$Tr(B) = 4 - 1 + 3 = 6$$

Par propriété, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{Tr}(B)$, d'où $\lambda_3 = 6 - 2 - 2 = 2$.

7. Vos résultats sont-ils compatibles avec le déterminant de B (que vous calculerez en utilisant la méthode de Sarrus)? (1,5 point)

Calcul du déterminant :

Conclusion:

Par propriété(le produit des valeurs propres d'une matrice est égal au déterminant de cette matrice), on a : Dét(B) = $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3$ d'où $h_3 = \frac{8}{(g_1 \times g_2)} = 2$: résultat cohérent

8. La matrice B est-elle diagonalisable ? (1 point)

La matrice B n'est pas diagonalisable car elle admet une valeur propre triple dont le sous-espace propre est de dimension 2 seulement. On ne peut pas trouver une matrice de vecteurs propres régulière (et donc inversible).

III. Matrice représentative de $\dagger(\cdot)$ par rapport à une autre base (5 points)

On considère le système
$$S = \{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & (-1) & (0) & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A en utilisant une méthode différente de celle de Sarrus. (0,5 point)

Matrice triangulaire dont le déterminant est en conséquence égal au produit de ses termes diagonaux : $D\acute{e}t(A) = -1 \times (-1) \times (-1) = -1$

2. Démontrer que *S* est une base de \mathbb{R}^3 . (1 point)

Une base de \mathbb{R}^3 est formée de 3 vecteurs libres de \mathbb{R}^3

- Les trois vecteurs de S sont des vecteurs de \mathbb{R}^3
- $D\acute{e}t(A) \neq 0 \Longrightarrow A$ est régulière \Longrightarrow les colonnes de A (qui sont les vecteurs de S) sont linéairement indépendantes

Le système S est donc une base de \mathbb{R}^3

3. Déterminer la matrice D représentant f(.) par rapport à la base S. (1,5 point)

Notons D = $(C_1 C_2 C_3)$ où C_i donne les coordonnées, dans la base S, de l'image par $f(\cdot)$ du jème vecteur de S.

•
$$f(1) = (-2 -1 -1)(1) = (2) = 2 \times (1) \Longrightarrow C_1 = (0)$$

• $f(1) = (-2 -1 -1)(1) = (2) = 2 \times (1) \Longrightarrow C_1 = (0)$
• $f(-1) = (-2 -1 -1)(-1) = (-2) = 2 \times (-1) \Longrightarrow C_2 = (2)$
3 2 3 3 6 3 0

•
$$f(-1) = (-2 \ -1 \ -1)(-1) = (-2) = 2 \times (-1) \Longrightarrow C_2 = (2)$$

On a donc
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Effectuer le produit AM, où M = $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduisez-vous ? (1 point)

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & (-1 & -1 & 0) & = & (0 & 1 & 0) & \text{D'où } \mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}. \\ 1 & 3 & -1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A, **D** et **M** ? (1 point)

$$B = ADA^{-1} = ADM.$$

Exercice 2 (5 points)

Soit le vecteur $V_1 = (1)$.

1. Déterminer l'ensemble E_1 des vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à V_1 . (1 point)

Les vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonaux à V_1 sont les vecteurs $X = (X_2)$ tels que $X * V_1 = X^u V_1 = 0$, c'est-à-

dire les vecteurs tels que $x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Longrightarrow x_3 = x_1 + x_2$.

$$X \in E_1 \iff X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 &) = x_1(0) + x_2(1) \\ x_1 + x_2 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que E_1 est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $\{(0)$, $(1)\}$

2. Vérifier que
$$V_2 = (2) \in E_1$$
. (0,5 point)

 $V_1 * V_2 = 1 \times 0 + 1 \times 2 - 1 \times 2 = 0$. Donc $V_2 \in E_1$

3. Déterminer un vecteur V₃ de E₁ orthogonal à V₂. (1 point)

$$V_{3} = (x_{2}) \text{ tel que } \begin{cases} V_{3} \in E_{1} \Leftrightarrow x_{1} + x_{2} - x_{3} = 0 \\ V_{3} \perp V_{2} \Leftrightarrow V_{3} * V_{2} = 0 \Leftrightarrow 2x_{2} + 2x_{3} = 0 \end{cases}$$

$$V_{3} \text{ vérifie donc le système } \begin{cases} x_{1} + x_{2} - x_{3} = 0 \\ 2x_{2} + 2x_{3} = 0 \end{cases}$$

$$Ce \text{ qui donne : } \begin{cases} x_{3} = -x_{2} \\ x_{1} = -x_{2} + x_{3} = -2x_{2} \end{cases}$$
Par exemple, pour $x_{2} = 1$, on a $x_{1} = -2$ et $x_{2} = -1$, ce qui don

$$V_3$$
 vérifie donc le système $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Ce qui donne :
$$\begin{cases} x_3 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Par exemple, pour $x_2 = 1$, on a $x_1 = -2$ et $x_3 = -1$, ce qui donne :

$$-2$$
 $V_3 = (1)$ -1

4. Calculer les normes des vecteurs V₁, V₂ et V₃. (1,5 point)

•
$$\|V_1\| = \int \overline{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

•
$$\|V_2\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

•
$$\|V_3\| = f(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 = \sqrt{6}$$

5. Déduire du système $\{V_1, V_2, V_3\}$ une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . (1 point)

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \mathbf{h} \\ \mathbf{1} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \mathbf{1} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \mathbf{h} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \mathbf{h} \\ \mathbf{1} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{4}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \mathbf{I} \\ \mathbf{L} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \mathbf{L} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

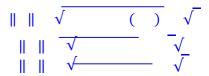
Universite Paris 1 Pantheon-Sorbonne Licence de Sciences Economiques – deuxième année Examen du 15 janvier 2016 – 17h-19h

Indiquez votre numéro de TD sur votre copie

EXERCI	CE I (6,5 points) — Soit la matrice A:
	A = ()
1.	Calculer le déterminant de A . (1 point) Par exemple, méthode des cofacteurs en développant par rapport à la deuxième colonne (ou ligne)
	() ()
2.	En déduire : a. que la matrice A est inversible (0,5 point) La matrice A est de plein rang puisque son déterminant est non nul. On peut en déduire que A est inversible. b. que les colonnes de A forment une base de IR ³ . On notera B ₁ cette base. (0,5 point) Comme la matrice A comporte 3 colonnes linéairement indépendantes, les colonnes de A
	forment une base de IR ³ .
3.	Donner les coordonnées du vecteur () dans la base B_1 . En déduire la matrice inverse de
	A . (1,5 point)
	Le vecteur () des coordonnées de () dans la base B_1 est défini par :
	()()()()
	On applique la méthode du pivot à la matrice élargie du système : ()
	() {
	On en déduit, sous forme matricielle, que :
	() () () d'où ilvient ()
4.	On note C_1 , C_2 et C_3 les trois vecteurs de la base B_1 . Calculer les produits scalaires : C_1*C_2 , C_2*C_3 et C_1*C_3 . Commenter. (1 point)
	{
	On en déduit que ces trois vecteurs sont orthogonaux deux-à-deux

Déterminer la norme euclidienne des vecteurs C_1 , C_2 et C_3 . (1 point)

5.



6. Déduire des questions précédentes une base orthonormée de IR 3 . On notera B_2 cette base. (1 point)

Les colonnes de $\bf A$ forment une base de IR^3 dont les vecteurs sont orthogonaux deux-àdeux. Pour former une base orthonormée de IR^3 , il suffit de diviser chacun de ces vecteurs par sa norme. La base B_2 est alors définie par:



EXERCICE II (13,5 points) — Soit la matrice **M**:

- 1. Sans effectuer aucun calcul, peut-on dire si la matrice **M** est diagonalisable ? (0,5 point) La matrice **M** est symétrique. Elle est donc diagonalisable.
- 2. On pose $N = M I_3$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.
 - a. Déterminer le rang de N. (1 point)

()

car ses trois colonnes sont proportionnelles : et

b. Déterminer une base de ker**N**. (2 points)

Par application du théorème des dimensions.

Pour former une base de , il faut donc deux vecteurs libres de On peut choisir par exemple :

{() ()}

c. L'application linéaire f() définie par f(X) = NX est-elle injective ? surjective ? bijective ? (1 point)

Notons l'ensemble de départ de et sont ensemble d'arrivée ()

- () n'est pas injective car ou encore car (une infinité de vecteurs ont pour image le vecteur nul)
- () 'st p s su j ct v c ou encore car est un sous-espace vectoriel de plus petit que (certains vecteurs de 'o t p s 'antécédent)
 () n'est pas bijective puisqu'elle n'est ni injective ni surjective
- d. Déterminer quelle condition doivent remplir les coordonnées du vecteur Y pour que le système $\mathbf{N}X = Y$ admette au moins une solution, pour qu'il n'admette aucune solution. (2 points)

Deux possibilités:

	solution lorsque, c'est-à-dire lorsque est proportionnel à () c'est-à-
	dire lorsqueIl n'admet aucune solution dans les autres cas.
	- Le système NX=Y admet au moins une solution lorsque ()(),
	c'est-à-dire lorsque est proportionnel à () c'est-à-dire lorsque .
	Il n'admet aucune solution dans les autres cas.
3.	Déterminer la trace de la matrice M . (0,5 point)
	()
4.	
	• La matrice () est singulière ce qui implique que est une valeur propre de .
	• =2 : la dimension du sous-espace propre associé à est donc 2.
	• est symétrique ce qui implique que la matrice est diagonalisable et, en conséquence, que la multiplicité algébrique d'une valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé : 1 est donc une valeur propre double de M. On en déduit que .
_	On sait que () d' où l'on déduit
5.	Vérifier ce résultat en utilisant le polynôme caractéristique de M . (1 point)
	() () ()
	Méthode des cofacteurs en développant par rapport à la deuxième colonne (ou ligne)
	On en déduit que ()()()()
	Ce qui confirme que 1 est une valeur propre double et -1 une valeur propre simple.
6.	Montrer que la matrice A de l'exercice I est une matrice de vecteurs propres de M . (1 point)
	Si A est une matrice de vecteurs propres de M , alors, on doit avoir v c
	pour chacune des colonnes de A . Vérifions le :
	• ()()(): la première colonne de A est donc un
	vecteur propre associé à la valeur propre -1.
	• ()()(): la première colonne de A est donc un vecteur
	propre associé à la valeur propre 1.
	• ()()()(): la première colonne de A est donc un vecteur
	propre associé à la valeur propre 1.
7.	En déduire une matrice P , telle que : $M = PDP'$, où D est une matrice diagonale que l'on explicitera. (2 points)

- Comme l'application n'est pas surjective, le système NX=Y admet au moins une

La matrice **A** est une matrice de vecteurs propres de **M** dont les vecteurs sont orthogonaux deux-à-deux. Pour qu'une matrice de vecteurs propres de **M** soit telle que

(son inverse est égale à sa transposée), il faut que ses colonnes soient non seulement orthogonales deux –à-deux mais aussi que ses colonnes soient de norme unitaire. Les colonnes de **P** doivent former une base de vecteurs propres orthonormée. En d'autres termes, la matrice des vecteurs propres doit être orthogonale.

La base B_2 , formée à partir de la matrice ${\bf A}$ en divisant les colonnes de ${\bf A}$ par leur norme (question 6 exercice 1) est une base orthonormée de vecteurs propres de ${\bf M}$. On peut donc choisir la matrice



première colonne de ${\bf P}$ est un vecteur propre associé à -1 et les deux suivants des vecteurs propres associés à 1.

8. Soit g() l'application linéaire définie par : g() (). Déterminer sa matrice par rapport à la base canonique de IR³, puis par rapport à la base B_1 , puis par rapport à la base B_2 de l'exercice I. (1 point)



- La matrice représentative de l'application () par rapport à la base canonique de IR³ est donc la matrice **M**.
- La matrice représentative de () (ou de **M**) par rapport à la base est déterminée à partir de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de .

 C'est la matrice telle que Comme est une matrice de vecteurs propres de associée à , on en déduit que .

Universite Paris 1 Pantheon-Sorbonne Licence de Sciences Economiques – deuxième année Examen du 20 juin 2016 – 11h30-13h30

Corrigé

Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Partie I-

1. Déterminer le rang de la matrice A.

On en déduit que rang A = 2 car

- a) La méthode du pivot appliquée à la matrice A aboutit à une matrice triangulaire comportant un zéro sur la diagonale principale, ce qui implique que rangA < 3;
- b) Le deux premières colonnes ne sont par proportionnelles donc rang $A \ge 2$.

On pouvait aussi, sans calcul constater que la somme des trois colonnes donnait le vecteur nul, ce qui implique que les colonnes sont linéairement dépendantes et que rangA < 3.

2. En déduire le déterminant de la matrice A.

Lorsqu'une matrice carrée est singulière (colonnes linéairement dépendantes ou liées), son déterminant est nul. On déduit donc de ce qui précède que DétA = 0

3. Calculer le déterminant de la matrice B.

déterminant de la matrice obtenue en remplaçant une ligna par une combinaison linéaire d'elle-même (avec le coefficient 1) et des autres lignes.

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes de sa diagonale principale. On en déduit que $D\acute{e}tB = 1 \times 3 \times (-2) = -6$

4. En déduire le rang de la matrice B.

Lorsque le déterminant d'une matrice carrée est non nul, celle-ci est de plein rang (régulière). On peut donc en déduire que rangB = ordreB = 3.

5. Notons $S_{\mathcal{E}}$ le système de vecteurs formé par les colonnes de A et S_B le système de vecteurs formé par les colonnes de B. Lequel de ces deux systèmes forme une base de \mathbb{R}^3 ?

Pour former une base de \mathbb{R}^3 , il faut trois vecteurs linéairement indépendants de \mathbb{R}^3 .

- Les deux systèmes de vecteurs $S_{\mathcal{A}}$ et $S_{\mathcal{B}}$ sont bien formés de 3vecteurs de \mathbb{R}^3 (vecteurs à trois coordonnées);
- Les vecteurs de $S_{\mathbb{E}}$ sont liés : $S_{\mathbb{E}}$ ne forme donc pas une base de \mathbb{R}^3 ;
- Les vecteurs de S_B sont libres : S_B forme une base de \mathbb{R}^3 .
- 6. Laquelle des deux matrices est représentative d'une application linéaire bijective?

Les matrices A et B sont d'ordre 3 et représentent donc des applications linéaires de $E = \mathbb{R}^3$ (ensemble de départ) dans $F = \mathbb{R}^3$ (ensemble d'arrivée).

Une application linéaire $f(\cdot)$ est bijective lorsque rangf = diNE = diNF, où rangf est le rang de la matrice représentative de $f(\cdot)$.

Ici, pour que $f(\cdot)$ soit bijective, il faut donc que le rang de la matrice soit égal à 3. On en déduit que la matrice B est représentative d'une application linéaire bijective mais pas la matrice A.

7. Soit l'application linéaire f(X) = AX. En utilisant les résultats précédents et le théorème des dimensions, déterminer la dimension de Kerf.

On considère ici une application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $F = \mathbb{R}^3$ (car ordre A = 3).

Le théorème des dimensions énonce que

$$diNE = rangf + diNKerf$$
 ou encore $diNE = rangA + diNKerA$

On en déduit que dinKerf = dinKerA = 3 - 2 = 1

8. Donner une base de Kerf.

Puisque dinKer $\mathbf{f} = 1$, pour former une base de Ker \mathbf{f} , il faut un vecteur non nul de Ker \mathbf{f} , c'est-à-dire un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $AX = \overline{0}_3$.

On remarque que la somme des trois colonnes de A donne le vecteur nul :

Le vecteur (1) forme donc une base de Kerf. On peut noter cette base $B_{Kerf} = \{(1)\}$.

On pourrait également utiliser les calculs effectués dans la question 1 pour dire que si X = (y) est un

vecteur de Kerf, alors :

Les vecteurs de Kerf sont donc de la forme X = (z) = z (1) et le vecteur (1) forme une base de Kerf. z 1 1

Partie II- On note V_1 , V_2 et V_3 les colonnes de la matrice B.

1. Montrer que les vecteurs V_1 , V_2 et V_3 sont orthogonaux deux à deux.

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

- $V_1 * V_2 = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 0$: les vecteurs V_1 et V_2 sont donc orthogonaux ;
- $V_1 * V_3 = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$: les vecteurs V_1 et V_3 sont donc orthogonaux;
- $V_2 * V_3 = (-1) \times 1 + 2 \times 0 + (-1) \times (-1) = 0$: les vecteurs V_2 et V_3 sont donc orthogonaux;
- 2. Calculer les normes des vecteurs V_1 , V_2 et V_3 .

La norme du vecteur
$$(x_2)$$
 est $||(x_2)|| = \int x^2 + x^2 + x^2$.

On en déduit :

3. Déterminer, à partir du système $\{V_1, V_2, V_3\}$ une base orthonormée de \mathbb{R}^3 que l'on notera $\{W_1, W_2, W_3\}$.

Le système de vecteurs $S_B = \{V_1, V_2, V_3\}$ forme une base de \mathbb{R}^3 (voir question I-5) dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux. Pour former une base orthonormée de \mathbb{R}^3 il suffit de diviser chacun de ces vecteurs par sa norme afin d'obtenir des vecteurs orthogonaux deux à deux dont la norme est égale à 1.

4. En déduire la matrice inverse de la matrice $C = (W_1 W_2 W_3)$

La matrice inverse d'une matrice orthonormée est sa transposée. On en déduit que

$$C^{-1} = C^{u} = (-1/\sqrt{6} - 2/\sqrt{6} - 1/\sqrt{6})$$

$$1/\sqrt{2} \qquad 0 \qquad -1/\sqrt{2}$$

5. Soit X un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . Que représente le vecteur $U = C^{-1}X$?

 $U = C^{-1}X \Leftrightarrow X = CU$: le vecteur U est donc le vecteur donnant les coordonnées de X dans la base formée par les colonnes de la matrice C.

Partie III-

1. Justifier que h = 0 est une valeur propre de la matrice A.

On a vu que $D\acute{e}tA=0$, ce qui implique que $D\acute{e}t(A-0I_3)=0$: h=0 est donc bien une valeur propre de A

2. Calculer la matrice $M = (A + 3I_3)$. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul cette matrice est singulière?

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les colonnes 1 et 3 de la matrice M sont identiques. Elle est donc singulière (pas de plein rang) et son déterminant est nul.

3. En déduire une valeur propre de la matrice A.

La matrice $M = (A - hI_3)$ avec h = -3 est singulière : h = -3 est donc une valeur propre de A.

4. Calculer la trace de la matrice A.

La trace de A est la somme des termes de sa diagonale principale : TrA = -1 + 2 - 1 = 0

5. En déduire la troisième valeur propre de la matrice A.

La somme des valeurs propres d'une matrice est égale à sa trace : $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ avec $h_1 = 0$ et $h_2 = -3$. On en déduit que $h_3 = 3$

6. Montrer que la matrice B est une matrice de vecteurs propres de la matrice A.

$$-1 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$$AW_1 = (-1 \quad 2 \quad -1)(1) = (0) = 0 \times W_1: \text{ on en d\'eduit que } W_1 \text{ est un vecteur propre de A associ\'e \`a}$$

$$2 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 0$$

la valeur propre $h_1 = 0$.

7. Déduire de ce qui précède une matrice diagonale D telle que $A = BDB^{-1}$.

Ce qui compte ici c'est de bien comprendre que l'ordre des valeurs propres dans la matrice diagonale doit correspondre à l'ordre des vecteurs propres.

On aura donc D =
$$\begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (0 & h_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
.

1. Calculer le déterminant de **A**. En déduire le rang de cette matrice.

Comme pour toutes les autres questions, d'autres méthodes ou options sont évidemment possibles à condition d'être justifiées.

D'où :
$$d\acute{e}t(A) = 1(1)(-1) = -1$$
. car (propriété P_2) le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux. **(0,5 point)**

Comme (propriété P_3) une matrice carrée est régulière – ou de plein rang – si et seulement si son déterminant est différent de 0, et comme dét(\mathbf{A}) = $-1 \neq 0$, la matrice \mathbf{A} est de plein rang. On a donc : rang \mathbf{A} = 3. (0,5 point)

2. Déterminer le rang de **B** (sans calculer son déterminant). En déduire le déterminant de **B**.

Définition 1 : le rang d'une matrice est égal au nombre maximum de colonnes (ou de lignes) linéairement indépendantes que cette matrice comporte.

Comme : (propriété P_4) le rang d'une matrice ne change pas quand on permute deux de ses colonnes (ou lignes),

on a:

$$-1$$
 -2 3
Rang(**B**) = rang(0 -3 3)
 -1 1 0

Comme : (propriété P_5) le rang d'une matrice ne change pas quand on remplace une de ses lignes (ou colonnes) par une combinaison linéaire d'elle-même, avec un coefficient non nul, et d'une autre ligne (ou colonne) de la même matrice,

on a:

 $\textbf{Comme}: (\textit{propriété}\ P_6), \textit{une ligne de 0 est linéairement dépendante},$

on a:

$$-1$$
 -2 3 -1 -2 3 En effet, les deux lignes de cette dernière matrice rang($\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = rang(\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2.$ $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2.$

D'où:

$$rang(B) = 2. (0.5 point)$$

La matrice **B** étant singulière (*i.e.* non régulière), on a (*propriété* P_3) : Dét(**B**) = 0. (0,5 point)

3. Soit l'ensemble $G = \{C_1, C_2, C_3\}$ où C_i est la $i^{ème}$ colonne de **A**. G est-il une base de IR³? Même question si C_i est la $i^{ème}$ colonne de **B**.

Définition 2 : on appelle base d'un espace vectoriel tout ensemble de vecteur libre et générateur de cet espace vectoriel.

Propriété P_7 : Si l'ensemble E est un espace vectoriel de dimension n, alors tout système libre de n vecteur de E forme une base de E.

Si l'ensemble *G* est formé par les trois colonnes de la matrice **A**, alors c'est un système libre (puisque **A** est régulière) de trois vecteurs (puisque **A** a trois colonnes) de IR³ (puisque **A** a trois lignes). C'est donc une base de IR³. **(0,5 point)**

Si l'ensemble *G* est formé par les trois colonnes de la matrice **B**, alors ce n'est pas un système libre. Par définition, il n'est donc la base d'aucun espace vectoriel. **(0,5 point)**

- 4. Soit le système d'équation linéaires : $\mathbf{A}X = U$ où U = (1) et où X est un vecteur de IR³.
 - a. Résoudre ce système.

La matrice élargie de ce système est : (A|U) =
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
.

Pour résoudre le système (que l'on notera S₁), on lui applique la méthode du pivot de Gauss :

On en déduit que le système S₁ est équivalent au système :

$$\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 1 & 0 \\
(0 & 1 & 0) & X = (1), \\
0 & 0 & -1 & 1
\end{array}$$

à savoir, en posant X = (y):

$$x + z = 0$$

 $y = 1;$
 $-z = 1$

ce qui donne:

$$x = 1$$

$$\{y = 1.$$

$$z = -1$$

Le système S_1 a donc pour unique solution : X = (1). (1 point)

b. Pouvait-on en prévoir le nombre de solutions?

Propriété P_8 : si G est une base de l'espace vectoriel E, alors tout vecteur X de E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de G. Les coefficient de cette combinaison linéaire donnent alors les coordonnées du vecteur X dans la base G.

On vient de voir (question 3) que, lorsque les vecteurs de G étaient les colonnes de A, alors G était une base de IR³. Il s'ensuit que tout vecteur U de IR³ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire *unique* des vecteurs de G; autrement dit, quel que soit le vecteur U de IR³, il existe un *unique* vecteur X tel que : AX = U. Le système S_1 a donc une solution unique quel que soit le vecteur U de IR³. (0,5 point)

c. Que représente le vecteur *X* par rapport au vecteur *U* et aux colonnes de *A*?

Le vecteur X donne les coordonnées du vecteur U dans la base G formée par les colonnes de A. (voir propriété P_8) **(0,5 point)**

5. Soit la matrice
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

0 1 -1

a. Calculer le produit AM. Que peut-on en déduire?

$$\mathbf{AM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3. \quad \textbf{(0,5 point)}$$

Le produit des deux matrices A et M étant égal à la matrice identité (d'ordre 3), on en déduit que A est l'inverse de M et réciproquement : $A = M^{-1}$ et $M = A^{-1}$. (0,5 point)

b. Calculer le produit $\mathbf{M}U$, où U est le vecteur de la question 4. Commenter.

$$MU = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & (1) = (1) = X. \text{ (0,5 point)} \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet, la matrice $\bf A$ étant inversible et d'inverse $\bf M$, en pré-multipliant les deux membres de S_1 par $\bf M$, on obtient :

$$MAX = MU$$

Et donc, puisque MA = AM = I:

$$X = MU.$$
 (0,5 point)

- 6. Soit $f(\cdot)$ l'application linéaire, de IR³ dans IR³, définie par $f(X) = \mathbf{B}X$.
 - a. Qu'appelle-t-on l'image et le noyau d'une application linéaire?

On appelle image d'une application linéaire $f(\cdot)$ de E dans F, l'ensemble, noté Imf, des images par $f(\cdot)$ des vecteurs de E. **(0,5 point)**

On appelle noyau d'une application linéaire $f(\cdot)$ de E dans F, l'ensemble, noté Kerf, des vecteur de E ayant pour image par $f(\cdot)$ le vecteur nul de F. **(0,5 point)**

b. Donner le rang de $f(\cdot)$ ainsi que la dimension de son image.

Définition 3: le rang d'une application linéaire est égal à la dimension de son image.

Propriété P_9 : Soit $f(\cdot)$, l'application linéaire de E dans F définie par $f(X) = \mathbf{B}X$, pour tout X de E, où \mathbf{B} est une matrice de format (dimF, dimE). On a : rang $f = \operatorname{rang} \mathbf{B}$.

De ces définition et propriété, il découle que :

$$rangf = dimImf = rangB = 2$$
. (0,5 point + 0,5 point)

c. Enoncer le théorème des dimensions et déduire la dimension de kerf.

Théorème des dimensions : Soit $f(\cdot)$, une application linéaire de E dans F. On a :

L'espace de départ E de l'application linéaire $f(\cdot)$ étant ici IR³, on a donc :

 $dimImf + dimKerf = dim IR^3$.

Comme:

$$dimImf = 2 et dimIR^3 = 3$$
,

on en déduit que :

$$dimKerf = 3 - 2 = 1$$
. (0,5 point)

d. Déterminer kerf.

$$Ker f = \{X \in E, f(X) = \vec{0}\} = \{X \in E, BX = \vec{0}\}\$$

Comme, en notant C_1 , C_2 et C_3 les trois colonnes de **B**, on a: $C_1 + C_2 + C_3 = \overline{0}$, on en déduit que :

$$\mathbf{B}(1) = \mathbf{0}.$$

Le vecteur (1) est donc un vecteur de kerf.

Kerf est un espace vectoriel de dimension 1. Le vecteur (1) de kerf étant non nul, il est

linéairement indépendant. Il forme donc une base de kerf (voir propriété P₇ à la question 3).

Il s'ensuit que kerf est l'ensemble des homothétiques du vecteur (1) ou encore le sous-espace

vectoriel de IR^3 engendré par $\{(1)\}$. (1 point)

e. Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes une valeur propre de B ainsi que l'un de ses vecteurs propres associés.

Définition 4: le nombre λ est appelé valeur propre de la matrice **B** s'il existe un vecteur P non nul tel que : **B** $P = \lambda P$. Le vecteur P est alors appelé vecteur propre de **B** associé à λ .

Comme:

$$\mathbf{B}(1) = \mathbf{0},$$

$$1$$

on a:

$$\mathbf{B}(1) = 0 (1).$$
1
1

Le réel 0 est donc valeur propre de ${\bf B}$ et (1) est un vecteur propre de ${\bf B}$ associé à 0. **(0,5 pour la** 1

valeur propre et 0,5 pour le vecteur propre).

- f. Sans effectuer aucun calcul, que peut-on dire :
 - i. De l'existence de solutions du système $\mathbf{B}X = U$, selon le vecteur U de IR³?

Ce système admet au moins une solution si le vecteur U de F a au moins un antécédent par $f(\cdot)$ dans E. C'est évidemment vrai si U est un vecteur de Imf, par définition de l'ensemble Imf. Mais pour savoir si cela est vrai quel que soit le vecteur U de F, il faut regarder si l'application est ou non surjective.

Définition 5 : une application f(.) est surjective si et seulement si tous les vecteurs de l'ensemble d'arrivée ont au moins un antécédent par f(.) dans E

Propriété P_{10} : une application linéaire est surjective si et seulement si son rang est égal à la dimension de son espace d'arrivée

Or l'espace d'arrivée de $f(\cdot)$, IR³, est de dimension 3, alors que le rang de cette application est égal à 2 (voir réponse à la question 6.b).

Le système $\mathbf{B}X = U$ n'a donc pas toujours de solution : il a au moins une solution lorsque U appartient à Imf et n'en a pas lorsque le vecteur U de IR 3 n'appartient pas à Imf. (0,5 point)

ii. du nombre de solutions du système $\mathbf{B}X = \mathbf{0}$?

L'ensemble des solutions du système $\mathbf{B}X = \vec{0}$ est kerf. On a donc vu (en réponse à la question 6.d) que ce système avait une infinité de solutions. **(0,5 point)**

7. Montrer que la matrice **A** est une matrice de vecteurs propres de la matrice **B**.

Notons les trois colonnes de A, C_1 , C_2 et C_3 respectivement :

$$C_1 = (1), C_2 = (1) \text{ et } C_3 = (1).$$

1 1 0

On a vu plus haut que C₁ était un vecteur propre de **B** associé à 0.

$$0 -3 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0$$

Comme
$$\mathbf{B}C_2 = (-1 \ -2 \ 3)(1) = (1) = \lambda(1)$$
 avec $\lambda = 1$. C_2 est un vecteur propre de \mathbf{B} (voir $-1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1$

définition 4 plus haut). C'est même un vecteur propre de **B** associé à la valeur propre 1.

Enfin, comme
$$\mathbf{B}C_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
 $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} = \lambda$ $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = -3$. C_3 est un vecteur propre $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

de **B** (voir définition 4 plus haut). C'est même un vecteur propre de **B** associé à la valeur propre -3.

A est donc une matrice de vecteurs propres de B. (1 point)

8. Quelles sont les valeurs propres de la matrice **B**?

B est une matrice d'ordre 3. Elle a donc trois valeurs propres.

Et ces valeurs propres sont 0, 1 et -3 (voir question précédente) (1 point)

9. Peut-on écrire **B** sous la forme **PDP** -1? Le cas échéant, expliciter (sans aucun calcul supplémentaire) les matrices **P**, **D** et **P**-1.

Propriété P_{11} : lorsqu'une matrice d'ordre 3 possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants (ou une matrice de vecteurs propres régulière, donc inversible) elle est diagonalisable. ou

Propriété P_{12} : lorsqu'une matrice d'ordre 3 possède 3 valeurs propres distinctes elle est diagonalisable (puisqu'alors P_{11} est vérifiée).

Comme **A** est une matrice régulière de vecteurs propres de **B** – ou comme **B** possède 3 valeurs propres distinctes – la matrice **B** est diagonalisable. On peut donc écrire **B** sous la forme PDP $^{-1}$, où **D** est une matrice des valeurs propres de **B**, et où **P** est une matrice régulière, donc inversible, de vecteurs propres de **B** correspondante. **(0,5 point)**

On peut choisir P = A (puisque A est une matrice régulière de vecteurs propres de B) et donc $P^{-1} = M$. La matrice D correspondante est alors :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(0,5 point pour A et 0,5 point pour D)

EXERCICE 2 – Soit la matrice
$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
.

1. Montrer que les colonnes de la matrice **N** sont orthogonales deux à deux.

Définition 6 : deux vecteurs de IRⁿ sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

On note X, Y et Z, les trois colonnes de **N** respectivement.

$$1 -1 \\ X*Y = (1)*(0) = 1(-1) + 1(0) + 1(1) = 0. X \text{ et Y sont donc orthogonaux.} \\ 1 1 \\ 1 1 \\ X*Z = (1)*(-2) = 1(1) + 1(-2) + 1(1) = 0. X \text{ et Z sont donc orthogonaux.}$$

$$-1$$
 1
 $Y*Z = (0)*(-2) = -1(1) + 0(-2) + 1(1) = 0$. X et Z sont donc orthogonaux. **(1 point)**

2. Déterminer la norme de chacune des colonnes de N.

Définition 7: norme d'un vecteur
$$(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array})$$
 de IR^n : $II(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array})$ $III = \mathbf{f} \overline{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ $IIII = \mathbf{f} \overline{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

- 3. Déduire des deux questions précédentes :
 - a. une base orthonormée de IR3

Définition 8 : Une base orthonormée de IR³ est un ensemble de trois vecteurs de IR³, orthogonaux deux à deux et de norme unitaire.

Les trois colonnes de la matrice N sont trois vecteurs de IR³ orthogonaux deux à deux. Elles forment donc une base de IR³ dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux. Leurs normes ne sont cependant pas égales à 1 (voir question précédente).

Mais on peut former une base orthonormée de IR³, notée *B*, en divisant chacun de ces trois vecteurs par sa norme. On a ainsi :

$$B = \{\frac{X}{\|X\|} \|\frac{F}{\|F\|} \|\frac{Z}{\|Z\|} = \{ 1 (1) \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \frac{1}{\sqrt{2}} (0), \frac{1}{\sqrt{6}} (-2) \}$$

D'où:

b. et une matrice \mathbf{Q} telle que $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}'$ (où \mathbf{Q}' est la transposée de \mathbf{Q}).

Propriété P_{13} : Si les colonnes de la matrice $M=(V_1\ V_2\cdots\ V_n)$ forment une base orthonormée de IR^n , alors $M^{-1}=M'$.

On en déduit que la matrice
$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$
 est telle que $Q^{-1} = Q'$ (1 point) L_3

Universite Paris 1 Pantheon-Sorbonne Licence de Sciences Economiques – deuxième année Algebre Lineaire

Examen du 23 juin 2015 - 14h-16h

EXERCICE 1 -

- 1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 0 -1 & 1
 - a. Définir le rang d'une matrice puis déterminer le rang de la matrice A. (1 point)

- Il y a un zéro sur la diagonale de matrice triangulaire donc le rang est strictement inférieur à 3
- La sous-matrice d'ordre 2 rouge est triangulaire sans aucun zéro sur la diagonale, son rang est donc 2
- Le rang de A est supérieur ou égal à celui d'une de ses sous-matrices
- On en conclut que rangA = 2

On pouvait également remarquer que :

- La somme des trois colonnes de A est le vecteur nul, les colonnes sont donc liées et rangA < 3
- Les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles donc rangA ≥ 2
- On en conclut que rangA = 2
 - b. En déduire la valeur de son déterminant. (0,5 point)

La matrice A n'est pas de plein rang ; son déterminant est donc nul

c. Les colonnes de A forment-elles une base de IR³? (0,5 point)

Pour former une base de IR³, il faut 3 vecteurs linéairement indépendants de IR³ or dans A on peut trouver au maximum 2 colonnes libres : les colonnes de A ne forment pas une base de IR³.

d. Déterminer l'image et le rang de l'application linéaire f(X) = AX. (1 point)

Inf est le sous espace vectoriel engendré par les colonnes de A. C'est donc le sous-espace 1 -1 0 vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par $G = \{(-1), (2), (-1)\}$. dim Inf = rangA = 2. On peut 0 -1 1 extraire de G une base de Inf composée de deux vecteurs de G, par exemple 1 -1 $B = \{(-1), (2)\}.$ 0 -1

e. En déduire dinKerA puis déterminer KerA. (1 point)

Théorème des dimensions : $\dim INf + \dim Kerf = \dim espace de départ$

On en déduit dim Kerf = 3 - 2 = 1.

Pour former une base de Kerf il suffit de trouver un vecteur X de l'espace de départ IR³ tel que

$$X_1$$
 0 1 -1 0 0
 $AX = \vec{0}_3 \Leftrightarrow A(X_2) = (0) \Leftrightarrow x_1(-1) + x_2($ 2) + $x_3(-1) = (0)$. Ici, par exemple, on peut x_3 0 0 -1 1 0

prendre $X = x_1$ (1) car la somme des trois colonnes de A est égale au vecteur nul de l'espace d'arrivée IR3.

f. L'application f(.) Est-elle injective? surjective? bijective? (1 point)

L'application f(.)

- n'est pas injective car rangf ≠ dim espace de départ ;
- n'est pas surjective car rangf ≠ dim espace d'arrivée ;
- elle n'est donc pas bijective.
- 2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 1 -1 & 1
 - a. Calculer le déterminant de la matrice B. (1 point)

Le déterminant d'une matrice ne change pas lorsqu'on ajoute à une des lignes de la matrice un homothétique d'une autre ligne. En appliquant cette règle à la matrice B, on obtient :

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes de sa diagonale principale et on a donc : DetB = -6

b. En déduire que les colonnes de B forment une base de IR3. (1 point)

DetB \neq 0 implique que la matrice B est de plein rang. On a donc rangB = 3.

Pour former une base de IR³, il faut 3 vecteurs linéairement indépendants de IR³ or les trois colonnes de B sont des vecteurs linéairement indépendants de IR³ : elles forment donc bien une base de IR³.

c. Quel est le nombre de solution du système BX =
$$(0)$$
 ? (1 point)

La matrice B étant de plein rang, quel que soit le système BX = U, la matrice élargie (B|U) sera également de rang 3.

- On a donc rang(B|u) = rang(B) ce qui implique que le système admet au moins une solution.
- Par ailleurs, rangB = 3 = nombre d'inconnues : le système admet donc au plus une solution.
- On peut en conclure que le système admet une solution unique.

On peut aussi dire que comme B est de plein rang elle est inversible : le système admet donc une solution unique définie par $X = B^{-1}U$

On peut enfin dire que comme les colonnes de B forment une base de IR³, tout vecteur U de IR³ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique de ces colonnes. Autrement dit, le système BX = U a une solution unique.

- 3. Soit la matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$
 - a. Calculer le produit BC. Commenter. (1 point)

1 1 1
$$\frac{1}{3}$$
 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ 1 0 0

(1 0 -2) $\frac{1}{2}$ 0 $-\frac{1}{2}$ = (0 1 0) On peut en déduire que C = B⁻¹

1 -1 1 $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ 0 0 1

L6 3 61

b. En déduire la solution du système BX = (0). (1 point) 3

La solution du système est donc $X = B^{-1}(0) = C(0) = (0)$ $3 \qquad 3 \qquad 1$

3 1 1 1 1 c. En déduire les coordonnées du vecteur (0) dans la base $\{(1), (0), (-2)\}$. (1 point) (1, 0)

3 1 1 1 $\frac{x_1}{x_2}$ Les coordonnées du vecteur (0) dans la base $\{(1), (0), (-2)\}$ sont les réels (x_2) tels que

$$3 & 1 & 1 & 1 \\ (0) = x_1 (1) + x_2 (0) + x_3 (-2) \\ 3 & 1 & -1 & 1$$

 x_1 3 x_1 2 (x_2) est donc la solution du système BX = (0) à savoir (x_2) = (0) x_3 3 x_3 1

4. Définir les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice. (1 point)

Soit M une matrice d'ordre n, on dit que le nombre h_i est une **valeur propre** de M s'il existe un vecteur non nul P_i tel que $MP_i = fi_iP_i$.

Le vecteur P_i est alors appelé **vecteur propre** de *M* associé à h_i.

5. Calculer le produit AB. (1 point)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. En déduire que B est une matrice de vecteurs propres de A. (1 point)

Notons B = $(C_1 | C_2 | C_3)$. On a : $A(C_1 | C_2 | C_3) = (0 \times C_1 | 1 \times C_2 | 3 \times C_3)$

On en déduit : $AC_1 = 0 \times C_1$, $AC_2 = 1 \times C_2$ et $AC_3 = 3 \times C_3$. Les colonnes de B sont donc des vecteurs propres de A .

7. Quelles sont les valeurs propres de A ? (1 point)

Les valeurs propres de A sont, d'après les résultats ci-dessus : $h_1 = 0$, $h_2 = 1$ et $h_3 = 3$.

8. Justifier que l'on peut écrire $A = PDP^{-1}$. (1 point)

La matrice A est d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes : elle est donc diagonalisable, ce qui signifie que l'on peut l'écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de A et où P est une matrice de vecteurs propres associés aux valeurs propres de A.

9. Expliciter (sans calcul supplémentaire) les matrices P, D et P⁻¹. (1 point)

On déduit de la question précédente que D =
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
, P = B et P⁻¹ = B⁻¹ = C $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10. Montrer que les colonnes de B sont orthogonales deux à deux. (1 point)

Notons B =
$$(C_1 \mid C_2 \mid C_3)$$
. On a $C_i \perp C_j$ si $C_i * C_j = 0$ ou encore $C^uC_j = 0$.

Calculons:

11. Calculer les normes des colonnes de B. (1 point)

La norme du vecteur
$$\binom{x_1}{x_2}$$
 est définie par : $\|\binom{x_1}{x_2}\| = \mathbf{f} \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_2^2}_{1}$ \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_3 On en déduit : $\|(1)\| = \sqrt{3}$; $\|(0)\| = \sqrt{2}$ et $\|(-2)\| = \sqrt{6}$

On en déduit :
$$\|(1)\| = \sqrt{3}$$
; $\|(0)\| = \sqrt{2}$ et $\|(-2)\| = \sqrt{6}$

12. En déduire une base orthonormée de IR3. (1 point)

Les colonnes de B sont orthogonales 2 à 2. Pour former une base orthonormée de IR³ à partir de B, il suffit de diviser chacune de ses colonnes par sa norme. On obtient alors la base

orthonormée
$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{h} & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{h} \\ \mathbf{1} \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{1} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{6}} \mathbf{h}$$

$$\mathbf{L} \mathbf{L} \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{1} & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{L} \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{1} \mathbf{1}$$

EXERCICE 1 (14,5 points) – Soient les trois vecteurs de IR³:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ C_1 = (1), C_2 = (0) \text{ et } C_3 = (1). \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice M :

car le déterminant d'une matrice ne change pas si l'on ajoute à une de ses lignes (ici la troisième) un homothétique d'une autre de ses lignes (ici la première ligne multipliée par – 1).

On peut ensuite calculer le déterminant de cette dernière matrice par rapport à sa seconde colonne :

$$D\acute{e}t(\mathbf{M}) = (-1)d\acute{e}t(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}) = -(-1 - (-2)) = -1.$$

- 2. En déduire:
 - a. que B = {C₁, C₂, C₃} est une base de IR³. (1 point)
 Tout système libre de trois vecteurs de IR³ est une base de IR³. Ce qui est le cas de B.
 En effet, B est un système de trois vecteurs de IR³. En outre, comme dét(M) G 0, les colonnes de M (autrement dit les vecteurs de B) sont linéairement indépendantes : B est donc un système libre.
 - b. que l'application linéaire $f(\cdot)$, de IR³ dans IR³, définie par : f(X) = MX est bijective. (1 point) Une application linéaire est bijective lorsque son rang est égal à la dimension de son espace de départ et à celle de son espace d'arrivée.

La dimension de IR³, espace de départ et d'arrivée de $f(\cdot)$, étant égale à 3, l'application $f(\cdot)$ est bijective si et seulement si son rang est égal à 3.

Comme : rangf = rangM

et comme : $rang\mathbf{M} = 3$ (puisque le rang d'une matrice est égal au nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes que cette matrice comporte et que les trois colonnes de \mathbf{M} sont linéairement indépendantes),

on a : rangf = 3. En conséquence, l'application linéaire $f(\cdot)$ est bijective.

- c. le nombre de solutions du système [1] :
 - [1] $\mathbf{M}X = U$, où U est un vecteur quelconque de IR^3 . (1 point) L'application $f(\cdot)$ étant bijective, quel que soit le vecteur U de IR^3 , il existe un unique vecteur X de IR^3 tel que f(X) = U, autrement dit tel que $\mathbf{M}X = U$: le système $\mathbf{M}X = U$ a une solution unique. (On peut aussi passer par le fait que B est une base et que les coordonnées d'un vecteur dans une base sont uniques).
- 3. Soit la matrice N:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & -1 & -1 \\
 N = (-2 & 4 & 3) \\
 -1 & 2 & 1
 \end{array}$$

a. Effectuer le produit **NM**. Commenter. (1 point)

1

Eléments de corrigé

2014

b. En déduire les coordonnées du vecteur U = (1) dans la base $B \dots (1 \text{ point})$

Les coordonnées du vecteur U dans la base B sont données par le vecteur colonne X = (y) vérifiant :

$$U = xC_1 + yC_2 + zC_3$$

autrement dit vérifiant : U = MX.

Or, de U = MX, on déduit NU = NMX, et donc NU = X.

On a donc:
$$X = \mathbf{N}U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} (1) = (3).$$

-1 2 1 1 1

Les coordonnées du vecteur U = (1) dans la base B sont données par le vecteur : (3).

c. ainsi que l'application réciproque de l'application $f(\cdot)$. (1 point)

L'application $f(\cdot)$ étant bijective, elle admet une application réciproque, notée $f^{-1}(\cdot)$ de IR³ dans IR³ et définie par la relation :

> $f(f^{-1}(Y)) = Y$, quel que soit le vecteur Y de IR³. [1]

Comme, f(X) = MX, la relation [1] peut s'écrire :

$$\mathbf{M}f^{-1}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$$

ce qui donne :

$$\mathbf{NM}f^{-1}(Y) = \mathbf{N}Y;$$

Ou encore:

$$f^{-1}(Y) = NY$$
.

L'application $f^{-1}(\cdot)$ est donc définie par la relation : $f^{-1}(Y) = NY$ avec N = (-2)

4. Soit l'application linéaire $g(\cdot)$, de IR³ dans IR³, définie par :

$$g(X) = AX$$
, avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2 -4 -4

a. Qu'appelle-t-on valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée ? (1 point)

Le nombre λ est appelé valeur propre de la matrice **A** s'il existe un vecteur P non nul tel que **A**P = λ P. Le vecteur P est alors appelé vecteur propre de **A** associé à λ.

b. Montrer que C_1 , C_2 et C_3 sont trois vecteurs propres de la matrice **A**. (1,5 points)

Comme
$$\mathbf{AC}_1 = (-1 \quad -2 \quad -1 \quad 2 \quad -4 \quad 2 \\ 2 \quad -4 \quad -4 \quad 0 \quad 1)(1) = (-2) = -2(1), \text{ le réel } -2 \text{ est valeur propre de } \mathbf{A} \text{ et le } \\ 2 \quad -4 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

vecteur C_1 l'un de ses vecteurs propres associés.

$$-1$$
 -2 -1 1 -2 1
Comme $\mathbf{AC}_2 = (-1 \ 0 \ 1)(0) = (0) = -2(0)$, le réel -2 est valeur propre de \mathbf{A} et le 2 -4 -4 1 -2 1

vecteur C_2 l'un de ses vecteurs propres associés.

$$-1$$
 -2 -1 -1 1 -1 Comme**A** C_3 = $(-1$ 0 $1)$ $($ $1)$ = (-1) = -1 $($ $1)$, le réel -1 est valeur propre de **A** et le 2 -4 -4 -2 2 -2 vecteur C_3 l'un de ses vecteurs propres associés.

c. En déduire les valeurs propres de **A**... (1,5 points)

La matrice **A** étant d'ordre 3, elle a trois valeurs propres.

Comme C_1 et C_2 sont linéairement indépendants, le sous-espace propre de $\bf A$ associé à la valeur propre —2 est au moins de dimension 2. Comme la multiplicité algébrique d'une valeur propre est supérieure ou égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé, le réel —2 est donc une valeur propre au moins double de la matrice $\bf A$. (1 point)

Comme **A** a également le réel —1 pour valeur propre, on en conclut que cette matrice a —1 pour valeur propre simple et —2 pour valeur propre double. (0,5 point)

d. ... ainsi que la matrice de l'application linéaire $g(\cdot)$ par rapport à la base B. (1 point) Les trois colonnes de cette matrice sont les coordonnées dans B des images par $g(\cdot)$ des trois vecteurs de B respectivement (i.e. de $g(C_1)$, de $g(C_2)$ et de $g(C_3)$ respectivement).

Première colonne de la matrice :

$$g(C_1) = \mathbf{A}C_1 = -2$$
 (1) = (0) dans la base B.
0 0

Deuxième colonne de la matrice :

$$g(C_2) = \mathbf{A}C_2 = -2 (0) = (-2)$$
 dans la base B .

Deuxième colonne de la matrice :

$$g(C_3) = AC_3 = -1$$
 (1) = (0) dans la base B.
-2 -1

La matrice recherchée est donc :

$$\mathbf{D} = (\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}$$

5. Peut-on écrire la matrice **A** sous la forme du produit **PDP**⁻¹, où **D** est une matrice diagonale ? Le cas échéant, expliciter les matrices **P**, **D** et **P**⁻¹. (2 points)

La matrice $\bf A$ est diagonalisable. En effet, elle a trois vecteurs propres linéairement indépendants : C_1 , C_2 et C_3 . On peut donc écrire la matrice $\bf A$ sous la forme : $\bf PDP^{-1}$, où $\bf D$ est une matrice des valeurs propres de $\bf A$ et où $\bf P$ est une matrice des vecteur propres correspondante (0,5 point).

On peut donc poser :
$$\mathbf{D} = (0 -2 0)$$
, $\mathbf{P} = \mathbf{M}$ et donc $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{N}$ (0,5 point parmatrice).
 $0 0 -1$

6. Exprimer A^t , etc. où t est un entier naturel quelconque. (0,5 point) De $A = PDP^{-1}$, on déduit : $A^t = PD^tP^{-1} = MD^tN$.

De $A = PDP^{-1}$, on deduit: $A^t = PD^tP^{-1} = MD^tN$

EXERCICE 2 (6,5 points) – Soient les deux matrices colonnes :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \text{et } V = (1). \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On note U^u la transposée de la matrice U. Effectuer le produit U^uV. Que peut-on en déduire?

$$U^{u}V = (1 \quad 2-2) (1) = 1(0) + 2(1) - 2(1) = 0. (0,5 \text{ point})$$

Les vecteurs (ou matrices) colonnes U et V sont donc orthogonaux. (0,5 point)

2. Déterminer l'ensemble des matrices colonnes de IR³ orthogonales à U et à V. On notera W l'une de ces matrices colonnes.

L'ensemble des matrices colonnes (y) orthogonales à U et à V vérifient le système :

$$U^{u}(y) = 0$$

$$Z \\ X \\ V^{u}(y) = 0$$

$$L \quad Z$$

autrement dit le système :

$$x + 2y - 2z = 0$$

$$y + z = 0$$

dont la solution est:

$$x = -2y + 2z = 4z$$

 $y = -z$

L'ensemble des matrices colonnes (y) orthogonales à U et à V est donc : $\{z \ (-1), z \in IR\}$.

_

3. La matrice colonne W = $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ appartient-elle à cet ensemble ? (0,5 point) -1

$$-1$$
 $W = (-1) = 1(-1)$ il est donc bien de la forme z (-1) .

4. Déterminer ||U||, ||V|| et ||W||.

Comme
$$\|(y)\| = \int x^2 + y^2 + z^2$$
 (0,25 point), on a:
 $\|U\| = \int 1^2 + 2^2 + (-2)^2 = \sqrt{9} = 3$ (0,25 point),
 $\|V\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, (0,25 point)
et $\|W\| = \int 4^2 + (-1)^2 + 1^2 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. (0,25 point)

- 5. En déduire:
 - a. Une matrice \mathbf{Q} telle que $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathbf{u}}$ (1 point);

Si l'on divise chacune des colonnes de C par son module, on obtient une matrice Q telle que $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathbf{u}}$.

D'où Q =
$$\begin{pmatrix} \frac{U}{\|U\|} & \frac{V}{\|V\|} & \frac{W}{\|W\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

b. Une base orthonormée de IR³ (1 point).

Une base orthonormée de IR³ est une base de IR³ dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme unitaire. Les trois vecteurs U, V et W de IR³ sont orthogonaux deux à deux. Ils forment donc une base de IR³ dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux. Si on veut qu'ils soient en outre de norme unitaire, il faut les diviser chacun par leur norme. Les trois colonnes de Q forment donc une base orthonormée de IR³.

6. Soit **C** = (U V W). Calculer le produit **C'C**, où **C'** est la transposée de **C**. En déduire **C** -1. (1 point)

$$\mathbf{C} = (\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}$$

La matrice C^{-1} vérifie $C^{-1}C = I$ (la matrice identité d'ordre 3).

Comme les colonnes de **C** sont orthogonales deux à deux, on a :

En divisant la première ligne de C' par $\|U\|^2 = 9$, la deuxième, par $\|V\|^2 = 2$ et la troisième, par $\|W\|^2 = 18$, on obtient donc la matrice C $^{-1}$. D'où :

2014

S 88

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2017-2018 Session de janvier 2018

Licence de Sciences Économiques (L2) Économie monétaire et financière Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Bruno Tinel (division 2) Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.
- Chaque question est notée sur 5 points

MARCHÉS FINANCIERS

Question 1 : A quoi sert le marché des changes ? Qui intervient sur ce marché ? Le volume annuel des opérations est-il en rapport avec celui du commerce international ?

TAUX D'INTÉRÊT

Question 2 : Les retournements conjoncturels sont-ils prévisibles à partir de la courbe des taux ? Comment la courbe des taux se déforme-t-elle pendant une crise ? Que se passe-t-il lorsque la croissance revient ?

MONNAIE

Question 3 : Qu'est-ce que la monnaie ?

POLITIQUE MONÉTAIRE

Question 4 : La Banque Centrale contrôle-t-elle M3 ? Est-ce un problème aujourd'hui en Europe, compte tenu des objectifs de la BCE ?

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2017-2018 Seconde session - juin 2018

Licence de Sciences Économiques (L2) Économie monétaire et financière Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Bruno Tinel (division 2) Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.
- Chaque question est notée sur 5 points

MARCHÉS FINANCIERS

Question 1 : A quoi servent les marchés boursiers ?

TAUX D'INTÉRÊT

Question 2 : Les taux d'intérêt peuvent-ils être négatifs ?

MONNAIE

Question 3 : Récemment, il a été demandé aux citoyens suisses de répondre à la question suivante : « qui doit créer notre argent les banques privées ou la banque nationale ? ». Vous expliquerez d'abord le processus de création monétaire, puis discuterez l'enjeu d'une telle question.

POLITIQUE MONÉTAIRE

Question 4 : La banque centrale européenne peut-elle mettre fin au quantitative easing ? Vous rappellerez au préalable en quoi consiste le quantitative easing, depuis quand il est mis en œuvre dans la zone euro, et dans quel but ?

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2016-2017 Session de janvier 2017

Licence de Sciences Économiques (L2) Économie monétaire et financière Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Bruno Tinel (division 2) Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.
- Chaque question est notée sur 5 points

MARCHÉS FINANCIERS

Question 1 : Quel serait l'effet d'une remontée des taux américains sur le cours des obligations. Que pourrait-on craindre ?

TAUX D'INTÉRÊT

Question 2 / Exercice: Soit une obligation à 5 ans d'échéance émise au pair. La valeur nominale est égale à 1000 euros. Son taux facial est égal à 2%. La fréquence des coupons est annuelle.

- Quelle sera la valeur de l'obligation sur le marché secondaire immédiatement après l'émission?
- Supposons que peu après l'émission, le taux de marché passe à 3%. Comment évoluera la valeur de l'obligation sur le marché ? Justifiez votre réponse.
- Le détenteur de l'obligation la revend 800 euros sur le marché secondaire à la fin de la 2^{ème} année de détention. Ecrivez la formule du taux de rendement actuariel de cette obligation du point de vue de l'investisseur qui la lui rachète pour la détenir jusqu'à l'échéance. Ce taux actuariel sera-t-il inférieur ou supérieur au taux de coupon ?

MONNAIE

Question 3 : Qui crée la monnaie ? Ce pouvoir est-il sans limite ?

POLITIQUE MONÉTAIRE

Question 4 : Quels sont les objectifs de la politique monétaire ?

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2015-2016 Session de janvier 2016

Licence de Sciences Économiques (L2) Economie monétaire et financière Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Bruno Tinel (division 2) Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Le barème utilisé pour la notation est précisé pour chaque question posée.
- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

MARCHES FINANCIERS

Question 1 (3 points) : Qu'est-ce que le marché monétaire ? Quels en sont les principaux intervenants (côté émetteurs et côté investisseurs) ?

Question 2 (3 points): Qu'est-ce qu'un actif liquide? Qu'est-ce qu'un marché liquide?

TAUX D'INTERET

Question 3 (3 points):

- a) Expliquez « l'effet balançoire »
- b) Quelle est la relation entre taux nominal et taux réel ?
- c) Un taux d'intérêt nominal peut-il être négatif ? Justifiez votre réponse et donnez des exemples.

Question 4 (3 points): D'après la théorie de Knut Wicksell, que se passe-t-il lorsque le taux monétaire ne correspond pas au taux naturel (notions dont vous rappellerez les définitions respectives)? Dans quelle configuration est-on aujourd'hui?

MONNAIE

Question 5 (4 points) : Expliquez l'expression « les crédits font les dépôts ». Est-ce à dire que les banques créent autant de monnaie qu'elles le souhaitent ?

POLITIQUE MONETAIRE

Question 6 (4 points): La Réserve fédérale américaine a décidé de relever son taux directeur de 25 points de base le 16 décembre 2015 tandis que la BCE a quelques jours avant décidé de prolonger de 6 mois son programme d'achats d'actifs. Expliquez en quoi ont consisté les politiques monétaires pendant la crise et pourquoi celles-ci divergent aujourd'hui aux Etats-Unis et dans la zone euro ?

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2014-2015 Session de juin 2015

Licence de Sciences Économiques (L2) Economie monétaire et financière Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Bruno Tinel (division 2) Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Chaque question est notée sur cinq points.
- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

MARCHES FINANCIERS

Question 1 : Expliquez pourquoi le cours des obligations augmente quand les taux d'intérêt baissent. En va-t-il de même pour le cours des actions ? Pourquoi ?

TAUX D'INTERET

Question 2 : Qu'est-ce qu'une courbe de taux ? Quelle est sa forme normale ? Comment se déforme-t-elle avant une crise ? Même question pendant et après une crise ?

MONNAIE

Question 3 : Les banques centrales ont émis beaucoup de monnaie centrale depuis la crise enclenchée en 2007-2008. Expliquez par quels types d'opérations et analysez les effets sur le taux d'inflation, sur la croissance. Vous pourrez vous concentrer sur le cas des Etats-Unis et de la zone euro.

POLITIQUE MONETAIRE

Question 4 : Qu'est-ce que le guidage des anticipations ?

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2013-2014 Session de janvier 2014

Licence de Sciences Économiques (L2) Théories et mécanismes monétaires Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Bruno Tinel (division 2) Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Le barème utilisé pour la notation est précisé pour chaque question posée.
- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

MARCHES FINANCIERS

Question 1 (3 points) : Expliquez la différence entre un marché organisé et un marché de gré à gré.

Question 2 (3 points): Les transactions ont globalement peu baissé sur les marchés dérivés pendant la crise. Expliquez pourquoi.

TAUX D'INTERET

Question 1 (3 points): Soit une obligation classique, nommée A, de 100€ émise à période 1 et donnant lieu à versement de 5€ par an. À la période 2, les conditions du marché ont changé et les obligations, nommées B, rapportent désormais 10€ par an pour 100€ de valeur faciale.

a/ Quel est le cours auquel s'échange désormais (en période 2) l'obligation de type A ? Détaillez le calcul.

b/ Expliquez en détail les mécanismes d'ajustement par lesquels on aboutit à ce résultat.

c/ En période 3, les obligations C émises à 100€ de valeur faciale rapportent seulement 2,5€ par an. Que se passe-t-il pour les obligations de type A et B ? Détaillez les mécanismes et les calculs.

Question 2 (3 points) : Expliquez la préférence pour la liquidité chez Keynes comme fondement théorique du taux d'intérêt.

MONNAIE

Question 1 (2 points) : Qu'est-ce que la neutralité monétaire ? En quoi ce principe peut-il être mis en doute ?

Question 2 (2 points): Que peut-on dire de la distinction entre monnaie et titres?

POLITIQUE MONETAIRE

Question 1 (4 points): En 1969, Milton Friedman affirmait : « Pour soigner la déflation, il suffit de jeter de la monnaie d'un hélicoptère ». Qu'en pensez-vous à l'aune de la crise actuelle ?

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2013-2014 Session de juin 2014

Licence de Sciences Économiques (L2)
Théories et mécanismes monétaires
Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Bruno Tinel (division 2)
Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Le barème utilisé pour la notation est précisé pour chaque question posée.
- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

MARCHES FINANCIERS

Question 1 (5 points): Expliquez la différence entre un financement par actions et un financement par obligations.

TAUX D'INTERET

Question 1 (5 points): Les anticipations de taux court suffisent-elle à expliquer le niveau des taux longs ?

MONNAIE

Question 1 (5 points): La masse monétaire croit-elle à proportion de la base monétaire ?

POLITIQUE MONETAIRE

Question 1 (5 points) : Quelles sont les marges de manœuvre de la politique monétaire quand les taux directeurs sont au plancher ?

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2012-2013 Session de décembre 2012

Licence de Sciences Économiques (L2) Théories et mécanismes monétaires Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Emmanuel Carré (division 2) Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Le barème utilisé pour la notation est précisé pour chaque question posée.
- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

MARCHES FINANCIERS

Question 1 (3 points) : Qu'est-ce que le « trading à haute fréquence ». Cette innovation a-t-elle amélioré le fonctionnement des marchés financiers ?

Question 2 (3 points) : Quelle a été l'évolution du marché des changes au cours des dernières décennies. Indiquez quelques ordres de grandeur. Cette évolution a-t-elle été en phase avec celle de l'économie réelle ?

TAUX D'INTERET

Question 1 (3 points) : La situation de crise actuelle relève-t-elle de la notion théorique de trappe à liquidité ? Au préalable, vous expliciterez la notion.

Question 2 (3 points): L'inversion de la courbe des taux est-elle un bon indicateur avancé des récessions futures?

MONNAIE

Question 1 (3 points): D'après la théorie quantitative de la monnaie, quel est l'effet d'une forte hausse de l'offre de monnaie sur l'inflation? Est-ce le cas depuis la crise?

POLITIQUE MONETAIRE

Question 1 (3 points) : Quelles sont les limites de la règle de Taylor au regard de la crise actuelle ?

Question 2 (3 points): Pourquoi les banques centrales ont-elles dû recourir à des mesures non conventionnelles de politique monétaire pendant la crise ? Expliquez en quoi consistent ces mesures et quels sont leurs objectifs ?

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2012-2013 Session de juillet 2013

Licence de Sciences Économiques (L2) Théories et mécanismes monétaires Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Emmanuel Carré (division 2) Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Le barème utilisé pour la notation est précisé pour chaque question posée.
- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

• •

MARCHES FINANCIERS

Question 1 (4 points): Expliquez ce qu'est une obligation souveraine. Expliquez la situation du marché de ces obligations souveraines pendant la crise de la dette souveraine en zone euro.

Question 2 (4 points): Quels sont les avantages et les limites d'une taxation sur les transactions financières, comme par exemple celle décidée par la Commission européenne en février 2013?

TAUX D'INTERET

Question 1 (3 points): Qu'est-ce qu'un taux de rendement actuariel ? Expliquez comment il s'obtient dans le cas d'une obligation. Peut-il être négatif ?

MONNAIE

Question 1 (3 points) : Le degré de concentration du secteur bancaire a-t-il une incidence sur la capacité de création monétaire des banques ?

POLITIQUE MONETAIRE

Question 1 (3 points) : Pourquoi certains économistes préconisent-ils d'élargir la palette des variables incluses dans la règle de Taylor ?

Question 2 (3 points): Pourquoi les politiques monétaires non conventionnelles menées par les banques centrales pour gérer la crise n'ont pas provoqué d'inflation jusqu'à présent?

Université Paris 1 (Panthéon-Sorbonne) EXAMEN ANNÉE 2011-2012 Session de rattrapage, juin 2012

Licence de Sciences Économiques (L2) Théories et mécanismes monétaires Jézabel Couppey-Soubeyran (division 1) et Dany Lang (division 2) Durée : 2 heures

IMPORTANT

- Le barème utilisé pour la notation est précisé pour chaque question posée.
- Rédigez vos réponses en bon français (évitez le style télégraphique et les abréviations) et soignez la présentation. Une très mauvaise orthographe sera pénalisée (les étudiants étrangers peuvent l'indiquer sur la copie).
- Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits.

MARCHES FINANCIERS

Question 1 (3 points): Les obligations d'Etat sont-elles encore des actifs sans risque?

Question 2 (3 points): Expliquez le rôle des agences de notation.

TAUX D'INTERET

Question 1 (2 points): Expliquer la relation entre le niveau des taux d'intérêt et le prix des titres Question 2 (2 points): Une baisse du taux d'intérêt entraine-t-elle une chute de l'épargne?

MONNAIE

Question 1 (3 points): Les banques créent-elles la monnaie ex nihilo?

Question 2 (3 points): L'augmentation de la base monétaire entraîne-t-elle celle de la masse

monétaire? Expliquez la relation entre les deux.

POLITIQUE MONETAIRE

Question 1 (2 points): Quel est le mandat de la BCE ? Comment pourrait-il évoluer ?

Question 2 (2 points): En quoi les politiques monétaires « non conventionnelles » consistent-

elles?

CORRECTION DE L'EXAMEN - Année universitaire 2017-2018 Macroéconomie (Durée: 2 heures)

Les calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits. Le barème est indicatif.

I. Questions (4 pts)

Répondre par vrai ou faux et justifier précisément votre réponse (0 pour toute réponse non justifiée)

1. L'appréciation du taux de change dégrade nécessairement la balance commerciale. [2 pts]

FAUX. Une appréciation du taux de change réel, qui correspond à une baisse de q(= EP*/P, prix relatif des biens étrangers en termes de biens domestiques), rend les biens étrangers relativement plus compétitifs, ce qui relance le volume des importations et réduit le volume des exportations, donc dégrade la balance commperciale [0,5]. Mais elle réduit également le coût des importations en termes de biens domestiques, ce qui améliore la balance commerciale [0,5]. L'effet est donc *a priori* ambigu : si les effets volume l'emportent, alors la balance commerciale se dégrade, mais si c'est l'effet prix, alors elle s'améliore [1].

2. Le taux de chômage naturel est indépendant de la politique monétaire. [2 pts]

VRAI. Le taux de chômage naturel est le taux de chômage qui se réalise quand les anticipations de prix sont vérifiées. Il ne dépend que des caractéristiques structurelles de l'économie, dotations en facteurs et imperfections sur les marchés des biens et du travail. [1] Il est indépendant des caractéristiques de la demande globale de biens. Or la politique monétaire agit sur la demande globale de biens, elle est donc sans effet sur le taux de chômage naturel. [1]

II. Problème (16 pts)

On considère le modèle IS/LM suivant :

$$C = c(Y - T) \quad 0 < c < 1$$

$$I = -\alpha i + I_0$$

$$T = tY \quad 0 < t < 1$$

$$G = G_0$$

où Y, C, I, i, T et G sont respectivement le revenu, la consommation, l'investissement, le taux d'intérêt, l'impôt et les dépenses publiques. G0 représente le niveau exogène des dépenses publiques. I0 est la composante exogène de l'investissement et α , c, t sont des réels positifs (compris entre 0 et 1 pour c et t).

1. Déterminez l'expression de la condition IS. [1 pt]

A l'équilibre du marché des biens, la production est égale à la demande de biens :

$$Y = C + I + G \Leftrightarrow Y = \frac{1}{1 - c(1 - t)} (-\alpha i + I_0 + G_0)$$
 [1]

2. L'expression de la condition LM est donnée par :

$$i = Y - (M - P)$$

où *M* est la masse monétaire exogène et *P* le niveau général des prix exogène. Déterminez l'expression du revenu d'équilibre macroéconomique. [1 pt]

A l'équilibre macroéconomique, les marchés des biens et de la monnaie sont équilibrés. Le revenu et le taux d'intérêt d'équilibre vérifient donc le système d'équations IS et LM. En résolvant ce système on obtient :

$$Y = \frac{\alpha}{1 - c(1 - t) + \alpha} (M - P) + \frac{1}{1 - c(1 - t) + \alpha} (I_0 + G_0)$$
 [1]

3. Déterminez l'impact d'une politique de dépenses publiques expansionniste $dG_0 > 0$ sur le revenu d'équilibre macroéconomique. En présentant les différents mécanismes à l'origine de cet impact, expliquez l'influence du paramètre α sur cet impact. [1,5 pts]

D'après l'expression du revenu d'équilibre, le multiplicateur budgétaire est donné par :

$$\frac{dY}{dG_0} = \frac{1}{1 - c(1 - t) + a} > 0. \quad [0, 5]$$

Donc suite à une relance budgétaire ($dG_0 > 0$), le revenu d'équilibre augmente mais d'autant moins que α , qui représente la sensibilité de l'investissement par rapport au taux d'intérêt, est grand.

En effet, une hausse des dépenses publiques accroît la demande de biens et donc le revenu. Sur le marché de la monnaie, cette hausse du revenu accroît la demande de monnaie et crée un excès de demande qui pousse le taux d'intérêt à la hausse. La hausse du taux d'intérêt conduit les entreprises à réduire leur demande d'investissement, et ce d'autant plus que α est grand. [0,5]. C'est l'effet d'éviction qui va réduire l'efficacité de la relance budgétaire et ce d'autant plus que α est grand. [0,5]

4. Déterminez l'impact d'une politique monétaire expansionniste dM > 0 sur le revenu d'équilibre macroéconomique. En présentant les différents mécanismes à l'origine de cet impact, expliquez l'influence de α sur cet impact. [1,5 pts]

 $D'après\ l'expression\ du\ revenu\ d'équilibre,\ le\ multiplicateur\ monétaire\ est\ donné\ par:$

$$\frac{dY}{dG_0} = \frac{\alpha}{1 - c(1 - t) + \alpha} > 0. \quad [0, 5]$$

Une relance monétaire dM > 0, accroît donc le revenu d'équilibre et ce d'autant plus que α est grand.2

En effet, une hausse de l'offre nominale de monnaie crée un excès d'offre sur le marché de la monnaie qui pousse le taux d'intérêt à la baisse [0,5]. Cette baisse du taux d'intérêt relance l'investissement, et donc la demande de biens et le revenu, et ce d'autant plus que α est grand.[0,5]

5. Déterminez l'impact d'un choc exogène négatif d'investissement $dl_0 < 0$ sur le revenu d'équilibre macroéconomique. En présentant les différents mécanismes à l'origine de cet impact, expliquez l'influence du paramètre t sur cet impact. Vous expliquerez les conséquences budgétaires (pour l'Etat) de ce choc. [2 pts]

D'après l'expression du revenu d'équilibre, le multiplicateur d'investissement est donné par : $\frac{dY}{dl_0} = \frac{1}{1-c(1-t)+\alpha} > 0$ [0,5], il est égal au multiplicateur budgétaire et dépend négativement du taux d'imposition t.

Une baisse de l'investissement aura les effets inverses de ceux d'une relance budgétaire décrits à la question 3 et conduira donc à une baisse du revenu qui sera d'autant plus faible que test grand [0,5]. En effet, une baisse de l'investissement exogène va réduire directement la demande et donc le revenu mais cette baisse du revenu conduit à une baisse des impôts (les impôts étant proportionnels au revenu) qui relance la consommation, et ce d'autant plus que test grand [1]. C'est l'effet de stabilisateur automatique de la fiscalité proportionnelle qui limite l'effet récessif sur le revenu d'un choc de demande négatif.

Suite au choc, les recettes fiscales diminuent pour un niveau de dépenses G_0 inchangé, le déficit budgétaire (G - T) se creuse. [0,5]

6. Supposons dorénavant que le niveau général des prix devienne endogène (prix et salaires flexibles). Montrez que l'équation de la demande globale s'écrit sous la forme suivante : $Y = a_1(M - P) + a_2(G_0 + I_0)$. Vous donnerez l'expression de a_1 et a_2 . [1 pt]

La demande globale donne le niveau de la demande de biens à l'équilibre du marché de la monnaie. Elle est donnée par le revenu d'équilibre IS-LM, obtenu à la question 2, qui peut s'écrire :

$$Y = \frac{\alpha}{1 - c(1 - t) + \alpha} (M - P) + \frac{1}{1 - c(1 - t) + \alpha} (I_0 + G_0)$$
avec $a_1 = \frac{\alpha}{1 - c(1 - t) + \alpha}$ [0,5] et $a_2 = \frac{1}{1 - c(1 - t) + \alpha}$ [0,5].

7. Supposons que l'équation de l'offre globale s'écrive:

$$P = P^e + v(Y - Y_n)$$

où P^e sont les anticipations exogènes de prix et Y_n le niveau naturel de la production. Y est un réel positif. Expliquez les fondements de cette courbe d'offre. [2 pts]

La courbe d'offre globale donne le niveau de prix fixé par les entreprises à l'équilibre du marché du travail.

Quand les anticipations de prix sont vérifiées, les entreprises produisent au niveau de revenu naturel. Si la demande augmente au-dessus de ce niveau naturel, alors les entreprises vont ajuster leur production, le chômage diminue. Sur le marché du travail, le pouvoir de né- gociation des salariés s'améliore et le salaire nominal négocié augmente [1]. Les entreprises pour maintenir leur profit répercutent cette hausse du salaire sur les prix qui font alors3

baisser le niveau de la demande globale et du revenu.[1]

8. Déterminez l'expression du revenu d'équilibre macroéconomique en utilisant l'expression de la demande globale $Y = a_1(M - P) + a_2(G_0 + I_0)$. [1 pt]

Pour déterminer le revenu d'équilibre macroéconomique, on résoud le système AS-AD. En substituant *P* par son expression donnée par AS dans AD on obtient :

$$Y = a_1[M - P^e - \gamma(Y - Y_n)] + a_2(I_0 + G_0)$$
 [1]

$$Y = \frac{a_1}{1 + \gamma a_1} (M - P^e + \gamma Y_n) + \frac{a_2}{1 + \gamma a_1} (I_0 + G_0)$$
 [1]

9. Déterminez l'impact d'une politique de dépenses publiques expansionniste sur le revenu d'équilibre macroéconomique. En présentant les différents mécanismes à l'origine de cet impact, expliquez l'influence de a_1 et γ sur cet impact. [2 pts]

D'après 8, $dY/dG_0 = \frac{a_2}{1+\gamma a_1}$ 0 [0, 5]. Une relance budgétaire va donc accroître le revenu d'équilibre mais d'autant moins que a_1 et γ sont grands.

Le paramètre a_1 mesure l'ampleur de la baisse de la demande de biens induite par une hausse des prix, il correspond au multiplicateur monétaire dans IS-LM (pour P exogène). Le paramètre γ mesure l'ampleur de la hausse des prix induite par une hausse de la demande de biens.

Un relance budgétaire accroît la demande globale de biens pour P donné, comme on l'a vu en 3. Les entreprises vont réagir à la hausse de la demande en augmentant leurs prix comme décrit en 7, et ce d'autant plus que γ est grand [0,5]. La hausse des prix va à son tour réduire la demande et donc le revenu, c'est l'éviction par les prix, qui est d'autant plus forte que a_1 est grand [0,5]. Au total, le revenu va augmenter mais il augmentera d'autant moins que la relance budgétaire induira une forte hausse des prix (γ grand) et un forte éviction de la demande (a_1 grand) [0,5].

10. Déterminez l'impact d'une politique monétaire expansionniste sur le revenu d'équilibre macroéconomique. En présentant les différents mécanismes à l'origine de cet impact, ex-pliquez l'influence des paramètres a_1 et γ sur cet impact. [2 pts]

D'après 8, $dY/dM = \frac{a_1}{1+\gamma a_1} = \frac{1}{a_1^1+\gamma} > 0$ [0,5]. Une relance monétaire va donc accroître le revenu d'équilibre et ce d'autant plus que a_1 est grand et γ petit. [0,5]

En effet, une relance monétaire accroît la demande globale de biens pour P donné, comme on l'a vu en 4 et ce d'autant plus que a_1 est grand [0,5]. Les entreprises vont réagir à la hausse de la demande en augmentant leurs prix (comme vu en 7) et ce d'autant plus que γ est grand, l'éviction par les prix sera alors d'autant plus forte [0,5]. Au total, le calcul du multiplicateur nous montre que le revenu va augmenter d'autant plus que a_1 est grand et γ petit.

11. Quel est l'impact de ces politiques budgétaires et monétaires sur le revenu d'équilibre macroéconomique lorsque $P^e = P$? [1pt]

Si les anticipations de prix sont vérifiées alors le revenu est égal au revenu naturel qui est indépendant des chocs de demande comme vu à la question de cours 1. [1]

EXAMEN - Année universitaire 2016-2017

Macroéconomie (Durée : 2 heures)

Les calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits. Le barème est indicatif.

Répondre par vrai ou faux et justifter précisément votre réponse (0 pour toute réponse non justiftée) [4 pts]

1. L'appréciation de l'Euro peut être coûteuse en chômage supplémentaire. [2 pts]

VRAI. Une appréciation de l'euro parce qu'elle renchérit les biens domestiques par rapport aux biens étrangers accroît le volume des importations et réduit le volume des exportations mais elle réduit également le prix des importations en termes de biens domestiques. Si les effets volume l'emportent sur l'effet prix (condition de Marshall-Lerner vérifiée), le solde de la balance courante se détériore et donc la demande de biens diminue. Les entreprises s'ajustent en réduisant leur production et donc l'emploi.

2. Un pays pauvre va nécessairement rattraper les pays plus riches à l'avenir. [2 pts]

FAUX. Tout dépend des caractéristiques structurelles du pays pauvre/aux pays riches:

- s'il est pauvre pour des raisons structurelles, parce que son taux d'épargne est plus faible que celui des pays plus riches, et donc son niveau de revenu/tête d'état stationnaire est faible, il restera plus pauvre s'il n'y a pas de choc à la hausse sur son taux d'épargne;
- . s'il est structurellement identique à d'autres pays mais qu'il est pauvre parce que son stock de capital courant est plus faible et donc plus éloigné de son état stationnaire, alors il aura un taux de croissance plus élevé.

Problème [16 pts]

On considère une économie caractérisée par les courbes IS et LM suivantes :

$$y = a_1g - a_2t$$
 (IS)
 $i = y - a_3(m-p)$ (LM)

où y, m, p, g, t, i sont respectivement la production (revenu), la masse monétaire exogène, le niveau général des prix exogène, les dépenses publiques et les impôts exogènes, le taux d'intérêt. Les coefficients a_1 , a_2 et a_3 sont des réels positifs.

1. Commenter la courbe (IS) en donnant une explication à sa forme particulière. [1 pt]

La courbe IS est indépendante du taux d'intérêt, ce qui indique que la demande (l'investissement) ne dépend pas du taux d'intérêt, la courbe IS est donc verticale dans le repère (y, i).

2. Interpréter économiquement les paramètres a_1 et a_2 . Pourquoi peut-on penser que $a_1 > a_2$? [1 pt]

 a_1 est le multiplicateur budgétaire qui mesure l'effet sur le revenu d'équilibre d'une unité supplémentaire de dépenses publiques et a_2 le multiplicateur fiscal qui mesure l'effet sur le revenu d'équilibre d'une baisse de 1 des impôts. Les dépenses publiques ont un impact direct sur la demande de biens alors que les impôts eux agissent indirectement sur la demande via la fonction de consommation. Une hausse de 1 de g accroît la demande et donc le revenu de 1 alors que une baisse de 1 de g accroît le revenu disponible des ménages de 1 ce qui les conduit à accroître leur consommation de la propension marginale à consommer qui est inférieure à 1. L'impact de la politique fisacle sur la demande et donc le revenu sera donc plus faible : g > g

3. Pourquoi peut-on penser que $a_1 > 1$? [1 pt]

Du fait de l'effet multiplicateur. Si les dépenses publiques augmententent de 1, la demande augmente directement de 1 mais aussi indirectement. En effet, les entreprises répondent à la hausse initiale de la demande en augmentant leur production, elles distribuent plus de revenu. Le revenu disponible des ménages augmente donc, ils vont donc pouvoir consommer plus, ce qui accroît à nouveau la demande, et donc la production, etc. La hausse de la production sera donc au final supérieure à la hausse des dépenses publiques : $a_1 > 1$.

4. Calculer y et i à l'équilibre macroéconomique et représenter graphiquement cet équilibre dans le plan (y, i). Commenter. [1 pt]

A l'équilibre macroéconomique, tous les marchés sont équilibrés. L'équilibre est déterminé à l'intersection des courbes IS et LM. La courbe IS suffit ici à déterminer le revenu d'équilibre qui est indépendant du marché de la monnaie et est donné par $y^* = a_1 g$ $a_2 t$. On obtient le taux d'intérêt d'équilibre en remplaçant y par son expression d'équilibre dans LM : $\mathbf{i}^* = a_1 g - a_2 t - a_3 (m - p)$.

- + figure 1.
- **5.** Mesurer l'effet d'éviction suite une hausse des dépenses publiques (dg > 0). [1 pt]

L'effet d'éviction est la perte d'efficacité de la politique budgétaire liée à la hausse induite du taux d'intérêt. Ici l'effet d'éviction est nul car la demande ne dépend pas du taux d'intérêt. Suite à la hausse de g, sur le marché des biens, le revenu augmente de $dy/dg = a_1$. Cette hausse de revenu provoque sur le marché de la monnaie une hausse du taux d'intérêt de $di/dg = a_1$, mais cette hausse ne rétroagit pas sur le revenu car la demande ne dépend pas du taux d'intérêt.

6. L'économie est maintenant caractérisée par les courbes IS et LM suivantes :

$$y = a_1g - a_2t - a_4i$$
 (IS)
 $i = y - a_3(m-p)$ (LM)

avec a4 un paramètre positif.

Calculer y à l'équilibre macroéconomique et représenter graphiquement cet équilibre macroéconomique dans le plan (*y*, *i*). [1 pt]

Maintenant la demande dépend négativement du taux d'intérêt, la courbe IS est donc décroissante dans le plan (y, i). L'équilibre macroéconomique est déterminé à l'intersection des courbes IS-LM. En substituant dans IS i par son expression donnée par LM, on obtient le revenu d'équilibre : $y^* = a_1g - a_2t - a_4[y - a_3(m - p)]$, soit :

$$y^* = \frac{a_1g - a_2t + a_4a_3(m-p)}{1 + a_4}.$$

+ figure 2.

7. Suite à une hausse des dépenses publiques (dg > 0), mesurer l'effet d'éviction. Dans quel cas est-il le plus élevé ? Expliquer. [1 pt]

Suite à la hausse de g, sur le marché des biens, d'après IS, le revenu augmente de a_1dg à taux d'intérêt donné. Mais cette hausse du revenu provoque une hausse du taux d'intérêt sur le marché de la monnaie qui réduit la demande et réduit donc l'effet de relance. Au total le revenu d'équilibre, d'après son expression déterminée en 6., n'augmente que $\deg a_1 = \deg a_2 = \deg a_1 = \deg a_2 = \deg a_1 = \deg a_2 = \deg a_2$

8. Pourquoi la politique monétaire est-elle devenue efficace ? [1 pt]

Parce que la demande est maintenant sensible au taux d'intérêt. La politique monétaire qui agit sur le taux d'intérêt va donc influencer la demande et donc le revenu.

9. Le niveau général des prix devient endogène et il est déterminé par l'équation d'offre globale (AS) suivante :

$$p = y + p^e - b$$
 (AS)

où p^e est le niveau de prix anticipé et b un réel positif.

Pourquoi p dépend-il positivement de y et de p^e ? [1 pt]

Parce que les firmes fixent leur prix en fonction de leur coût marginal de production, égal à coût terme au salaire nominal, qui dépend lui même négativement du niveau du chômage, et donc positivement du revenu, et positivement du niveau des prix anticipés. En effet, lors

de la négociation salariale, ce qui intéresse les agents, c'est le salaire réel, ils négocieront donc un salaire nominal d'autant plus élevé qu'ils anticipent un niveau de prix élevé pour la période. Par ailleurs, le pouvoir de négociation relatif des salariés dépend du taux de chômage car plus le chômage est élevé, plus les ménages se font concurrence pour un emploi et moins ils seront à même de négocier un salaire élevé. Comme le chômage et le revenu sont liés par une relation inverse, le salaire nominal va dépendre positivement du revenu.

10. Quand la courbe (IS) est celle donnée dans la question **1.**, quelle est la courbe de demande globale ? Déterminer y à l'équilibre macroéconomique et représenter graphiquement l'équilibre macroéconomique dans le plan (y, p). [2 pts]

La demande globale AD donnée par le revenu d'équilibre IS-LM est ici indépendante du niveau des prix, elle est verticale dans le repère (y, i). Le revenu d'équilibre est entièrement déterminé par la demande de biens, indépendamment de l'offre globale : $y^* = a_1g - a_2t$.

- + figure 3.
- **11.** Dans l'équilibre macroéconomique précédent, pourquoi p^e n'a-t-il aucune influence sur la production ? [1 pt]

Parce que le revenu d'équilibre est entièrement déterminé par le niveau de la demande, il est indépendant du niveau de l'offre globale, seul le niveau des prix en dépend, $dy/dp^e = 0$.

12. Quand la courbe (IS) est celle donnée dans la question 6, quelle est la courbe de demande globale ? Déterminer y à l'équilibre macroéconomique et représenter graphiquement l'équilibre macroéconomique dans le plan (y, p). [2 pts]

Dans ce cas la demande globale AD, donnée par la solution IS-LM $y = \frac{a_1g - a_2t + a_4a_3(m-p)}{1+a_4}$ est décroissante de pet le revenu d'équilibre est la solution du système AS-AD. On remplace p par son expression donnée par AS dans AD et on obtient le revenu d'équilibre :

$$y^* = \frac{a_1g - a_2t + a_3a_4(m - p^e + b)}{1 + a_4(1 + a_3)}.$$

- + figure 4.
- **13.** Dans cet équilibre macroéconomique, décrire l'effet d'une hausse de p^e . [1 pt]

Si les agents révisent à la hausse leurs anticipation de prix, alors ils vont renégocier à la hausse les salaires et les firmes vont répercuter cette hausse sur les prix. La hausse des prix parce qu'elle réduit la valeur réelle des encaisses monétaires crée un excès de demande sur le marché de la monnaie et le taux d'intérêt s'ajuste à hausse pour restaurer l'équilibre moéntaire. Cette hausse du taux d'intérêt va réduire la demande et les entreprises vont réduire leur production.

14. Ecrire (AS) pour $p = p^e$. Que représente le paramètre b? Représenter l'équilibre macroéconomique pour $p = p^e$ et calculer le multiplicateur budgétaire. Comment qualifier dans ce cas l'effet d'éviction suite à une hausse dg > 0 des dépenses publiques ? [1 pt]

Si $p = p^e$ alors l'équation d'offre s'écrit $p = y + p \not \mapsto y = b$. Le paramètre b correspond donc au niveau de produit naturel. Il est indépendant des facteurs de demande et dy/dg = 0. Suite à une hausse des dépenses publiques l'éviction est totale.

+ figure 5.

Figure 1.

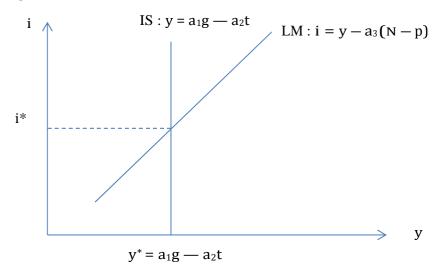


Figure 2.

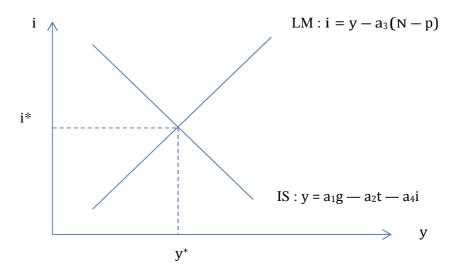


Figure 3.

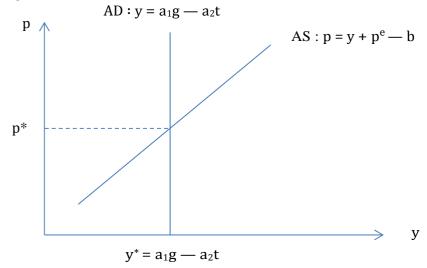


Figure 4.

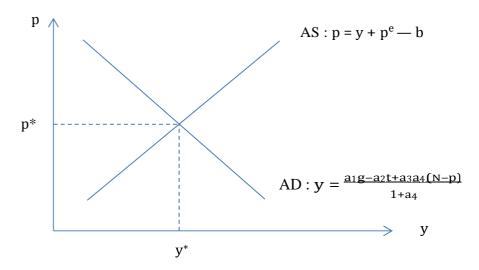


Figure 5.

